

ÜBER DIE INSTABILITÄT DER MEERESSTRÖMUNG IM GESCHICHTETEN MEER

Norijuki Iwata

Received March 31, 1961

Zusammenfassung

Der Verfasser zeigt hier, daß die quasigeostrophische Annäherungsform der Bewegungsgleichung der zusätzlichen Störung wie in der Atmosphäre auch im Meer entsteht, falls die Periode der Bewegung mehr als einige Tage ist. Mit dieser Annäherungsform hat er die Dynamik der Störungsentwicklung in der Meeresströmung untersucht, welche die Schlangenwidung des Stroms veranlasst.

Aus mehrfachen Betrachtungsweisen der Stromwindung im sowohl *Kuroshio* als auch Golfstrom einerseits, und aus einigen Modellversuchen andererseits wird klargemacht, daß der maßgebende Faktor in der Störungsentwicklung im unendlich tiefen Meer erstens die Querscherung der Grundströmung ist, welche nicht im südlichen sondern im nördlichen Gebiet des nach ostwärts laufenden Grundstroms stattfindet. Zweitens ist es der geschichtete Strömungsbau, welcher aus zwei mit verschiedener Dichte behafteten Schichten entsteht, wo der Grundstrom nur in der oberen Schicht vorhanden ist und wo es weder den Grundstrom noch Störung in der unteren Schicht gibt wegen der unendlichen Tiefe des Meeres. Weder Querscherung noch geschichteter Bau kann allein das wirkliche Phänomen der Entwicklung der Stromwindung erklären. Kurz gefasst spielt hier die Querverteilung der sog. "potentiellen Vorticity" wesentliche Rolle, statt deren der "absoluten Vorticity", welche in der barotropisch quellfreien Bewegung entscheidender Faktor ist.

Letztens wird klargemacht, daß die Störung in der unteren Schicht die bedeutsame Rolle spielt, falls man die Meerestiefe nicht unendlich sondern als endlich voraussetzt.

Einleitung

Es sei das einfache Grundströmungsfeld, als die Komponente U nur von y abhängt, $U=U(y)$, während die beiden übrigen Geschwindigkeitskomponenten verschwinden, $V=W=0$. Gegeben darein irgendwelche Störungsbewegung mit der kleinen Amplitude, so vergrößert sie sich in bestimmten Bedingungen der Geschwindigkeitsverteilung Grundstroms und der Wellenlänge der Störungsbewegung. Klingen die Störungen mit der Zeit ab, so wird die Strömung als stabil angesehen, wachsen sie zeitlich an, so wird die Strömung instabil, und es ist im letzten Fall die Möglichkeit des Umschlages in die turbulente Strömung gegeben. Diese Methode der kleinen Schwingungen der Stabilitätstheorie wird seit Rayleigh (1880), Sommerfeld (1903), Hopf (1914) untersucht bei der Forschung des Umschlages der laminaren Strömung in die turbulenten. Dazu leistet Tollmien (1929) und C. C. Lin (1945) großen Beitrag. Sie betrachteten barotropisch quellfreie aber zähige Strömung und bemühten sich, das Verhältnis zwischen dem kritischen Reynoldsen Zahl und der Wellenlänge der Störungsbewegung zu erklären.

Diese Methode wird auch von Meteorolog darauf angewandt, die Stabilität der Störungsbewegung in der Westwinde aufzuklären. Kuo (1949, 1951) und C. C. Lin (1950) zum Beispiel betrachten die Flüssigkeit als nicht zähig und ziehen den Einfluß der Erdrotation in Betracht. Die Flüssigkeit bleibt aber als quellfrei und barotropisch zurück.

Bei der Untersuchung der Instabilität der Störungsbewegung in der Meeresströmung wie *Kuro시오* und Golfstrom ist der Grundgedanke derselbe. Dabei ist aber zu beachten, daß man gerade im Meer den Effekt der Schichtenstruktur des Meeres nicht mehr vernachlässigt. Also ist die Meerestiefe durchschnittlich etwa 4000m und nur in der oberen dünnen Schichte befindet sich die starke Meeresströmung wie *Kuro시오* und Golfstrom. Die Tiefe dieser Meeresströmung ist durchschnittlich etwa 600 bzw. 800m. In der unteren Schichte bleibt das Wasser fast still im Vergleich zum oberen. Das für quasistatisch angesehene unter Wasser hat größere Dichte und der Gradient der Dichte nach unten ist immer positiv.

Zweitens ist der Einfluß der Bodengestalt auf das Anwachsen der Störungsbewegung zu beachten. *Kuro시오* wird oft verglichen mit dem Golfstrom. Was aber nur im *Kuro시오* stattfindet, ist die Ausbildung der wirbelförmigen, ausgedehnten Kaltwassermasse zwischen der Küste und Hauptstromband. Dieser große, zyklonische Wirbel befindet sich oft im offenen Meer zwischen *Izu-shoto* und *Nansei-shoto*.

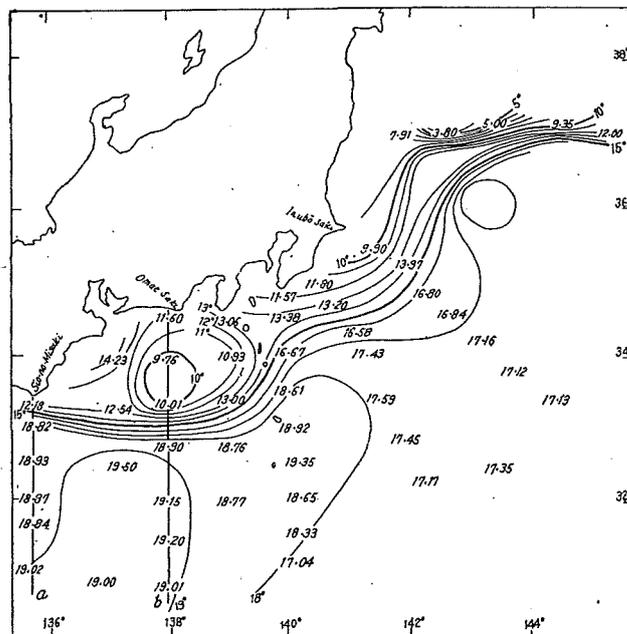


Abb. 1 Horizontale Verteilung der Temperatur ($^{\circ}\text{C}$) an der 200m Tiefe. (Febr. 1956)

Der Wirbel bleibt fast in demselben Ort und schiebt hier *Kuro시오* nach Süden, damit die Strömung rings des südlichen Teils des Wirbels herumläuft. Diese

Charakteristik ist im Golfstrom nicht zu bemerken. Zwar kann man das Anwachsen und Abklingen der Kaltwassermasse im Kurosio noch nicht dynamisch aufklären, doch ist es sehr wahrscheinlich, daß sie dem Vorhandensein des *Izu-shoto* und *Nansei-shoto* zugeschrieben wird. (Nan'ichi 1958, 1959; Fukuoka, 1958). Das theoretische Modell dazu muß aber etwa anders sein als die Leewelle, die durch die Bodenerhöhung beeinflusst wird (Queney, 1948; Kajiura 1953). In unserem Fall wird die Tiefe der Meeresströmung in der oberen dünnen Schichte sehr eng begrenzt und die Bodenerhöhung auf *Izu-shoto* und *Nansei-shoto* gelangt erst zu der untersten Schichte der Strömung. Also gibt es hier wenige Möglichkeit zum Auftreten der Strömungswindung durch die Einwirkung der Bodenerhöhung im Sinne der oben erwähnten Theorien. Ein schlichtes theoretisches Modell dazu wird im Kapitel 2 gezeigt.

Somit ist es zweckmäßig, daß man das Meer als zweischichtig voraussetzt, wo sich die Grundströmung nur in der oberen Schichte befindet. Die entscheidende Frage hierbei ist, ob irgendwelche kleine Störung, welche auf diesem Grundstrom einwirkt, zeitlich anwächst oder neutral bleibt.

Hierbei wird die Flüssigkeit als nicht zähig vorausgesetzt. Zwar darf man zum Beispiel bei der generellen Zirkulation im Meer die Einwirkung der Reibung nicht vernachlässigen, aber bei der Diskussion über die Instabilität der Meeresströmung in einem Teil des Meeres kann die Flüssigkeit annäherungsweise als nicht zähig angenommen werden, weil der Grundgedanke darauf beruht, daß die sog. potentielle Vorticity entlang der Stromlinie erhalten wird.

Letztens ist es zu bemerken, daß die Bewegungsgleichung linearisiert ist, i. e. die überlagerte Störungsbewegung wird als klein angenommen in dem Sinne, daß sämtliche quadratischen Glieder der Störungsbewegung gegenüber den linearen Gliedern vernachlässigt werden. Deshalb ist die Bewegungsgleichung nur gültig in der primären Entwicklungsstufe. Wir können nichts ersehen, wie angewachsene Störungsbewegung den Grundstrom umformt, und was für neue instabile Störungsbewegung durch die auf dieser Weise umgeformte Grundströmung veranlasst wird.

I. Instabilität der Meeresströmung im unendlich tiefen, geschichteten Meer.

1. Die Charakteristik des Golfstroms und *Kurosios* und daraus hergeleitetes Modell der Grundströmung.

Es sind zwei verschiedene Hauptrichtungen der Nachforschung nach der Instabilität der Meeresströmung durch die Methode der kleinen Schwingungen. Eine ist repräsentiert von Haurwitz & Panofsky (1950) und Kuo (1949), andere ist unternommen von Stommel (1953, 1955). Jene arbeiten

hauptsächlich, die Instabilität der Störungsbewegung durch die horizontale Querscherung der Grundströmung aufzuklären. Dabei bleibt die Bewegung als barotropisch und quellfrei. Dieser bemüht sich dagegen, im Sinne der hydraulischen Sprung das Auftreten der instabilen Störungsbewegung durch den Advektionseffekt der Grundströmung und durch den geschichteten Strömungsbau im Meer zu erklären.

Wie oben erwähnt wird, besteht die Charakteristik der wirklichen Meeresströmung gerade im baroklinischen, geschichteten Strömungsbau, dann widerspricht die Annahme der barotropisch quellfreie Bewegung physikalisch der Struktur der Meeresströmung im wesentlichen Punkt. Als Beispiel sind die vertikalen Verteilungen der Temperatur und Geschwindigkeit des *Kuroshio* in Abb. 2 gezeigt. Beim Golfstrom hat sie ähnlichen Charakter (Stommel, 1955).

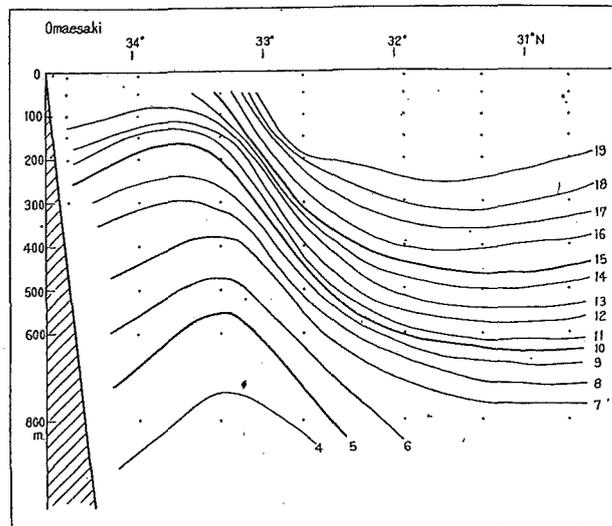


Abb. 2 (a)—1

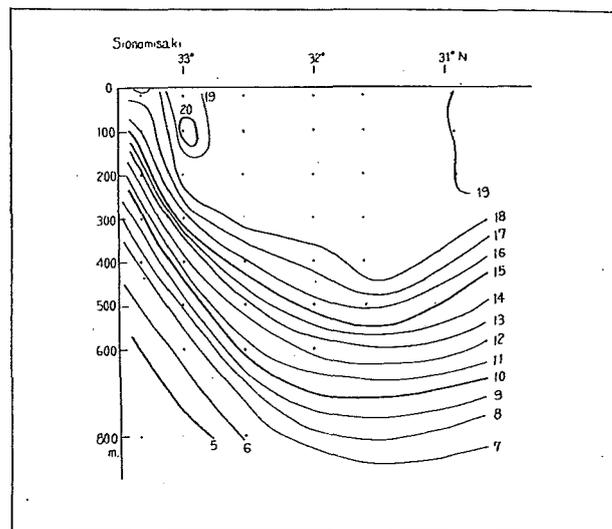


Abb. 2 (a)—2

Abb. 2(a) Vertikale Verteilung der Temperatur (°C) an den in Abb. 1 gezeigten Linien. (Febr. 1956)

Aus diesen vertikalen Abschnitten der Meeresströmung herausgeleitetes Modell hat folgende 4 Eigenschaften, wie in Abb. 3 gezeichnet wird: (1) Das Meer wird in zwei Schichten geteilt, deren obere Schichte kleinere Dichte als die unteren hat, (2) Es ist die Grundströmung nur in der oberen Schichte, (3) Die horizontale Querscherung der Grundströmung ist stromabwärts an der linken Seite sehr groß, (4) Dagegen ist sie an der rechten Seite verhältnismäßig klein und schwach.

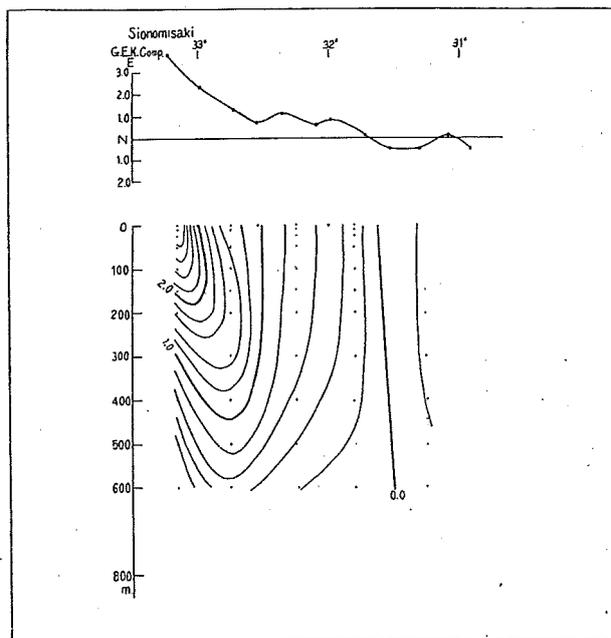


Abb. 2 (b)—1

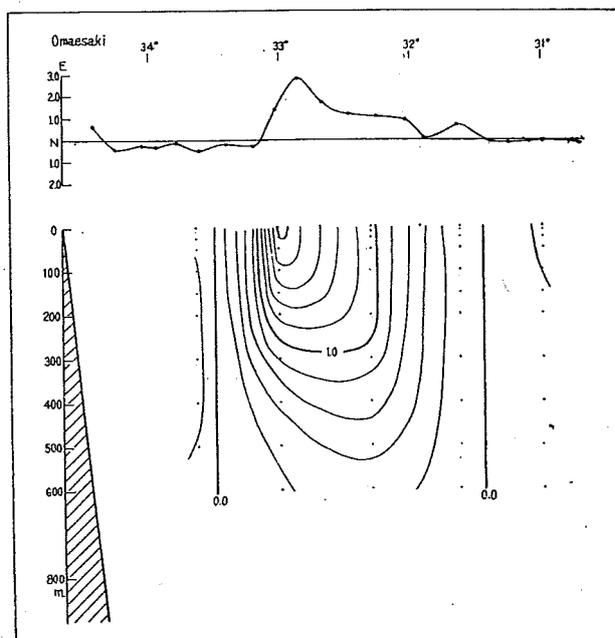


Abb. 2 (b)—2

Abb. 2(b) Vertikale Verteilung der dynamisch gerechneten Geschwindigkeit(kt) an den Linien in Abb. 1 in Bezug auf 800 dynamischem Meter und durch GEK gemessene Geschwindigkeit an der Meeresoberfläche. (Febr. 1956)

Damit ist es deutlich, daß das Modell der barotropisch quellfreien Bewegung, wo die Grundströmung bis unendliche Tiefe ohne Abfall vorhanden ist, mit dem wirklichen Zustand des Meeres im wesentlichen Punkt nicht übereinstimmt.

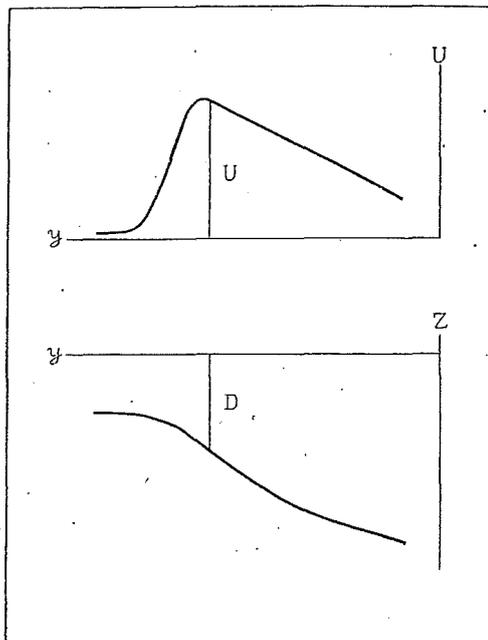


Abb. 3 Modell der Geschwindigkeitsverteilung der Meeresströmung im zweischichtigen Meer

Dagegen zieht Stommel (1953) zwar die geschichtete Struktur des Meeres in Betracht, aber er vernachlässigt sowohl die Querscherung der Grundströmung als auch den Gradienten der inneren Trennfläche. Der Gradient der Trennfläche ist aber etwa 10^3 fach größer als der Oberflächengradient und ist verbunden mit der Grundströmungsgeschwindigkeit durch die Formel der geostrophischen Beziehung:

$$U = -\frac{g}{f} \Delta\rho \frac{dD}{dy}$$

wo D die Tiefe der oberen Schichte zeigt. Vernachlässigt man die Querscherung der Grundgeschwindigkeit U , so stößt sich die Trennfläche an der Oberfläche irgendwo auf der linken Seite und auf der rechten Seite wächst die Höhe der Oberfläche immer an. So hat Stommelsches Modell wesentliche Schwierigkeit an sich.

Die Frage, was für Störungsbewegungen anwachsen in diesem zweischichtigen Meer, welches obige 4 Eigenschaften hat, führt zur mathematischen Schwierigkeit. Obwohl darf man weiter das Modell vereinfachen, um die Schwierigkeit zu vermeiden, aber wenigstens muß man die Querscherung der Grundströmung an der nordlichen Seite und die zweischichtige Struktur des Meeres bewahren. Sonst verliert das Modell physikalischen Sinn.

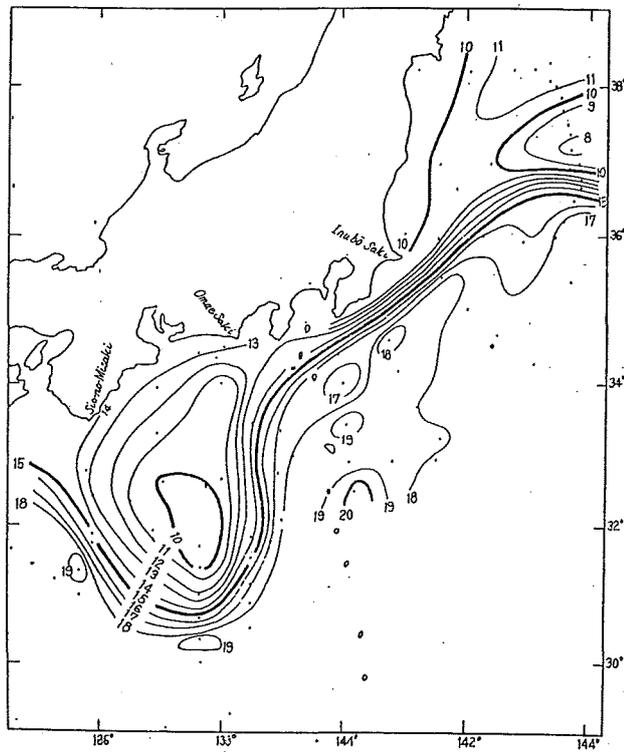


Abb. 4 (a)

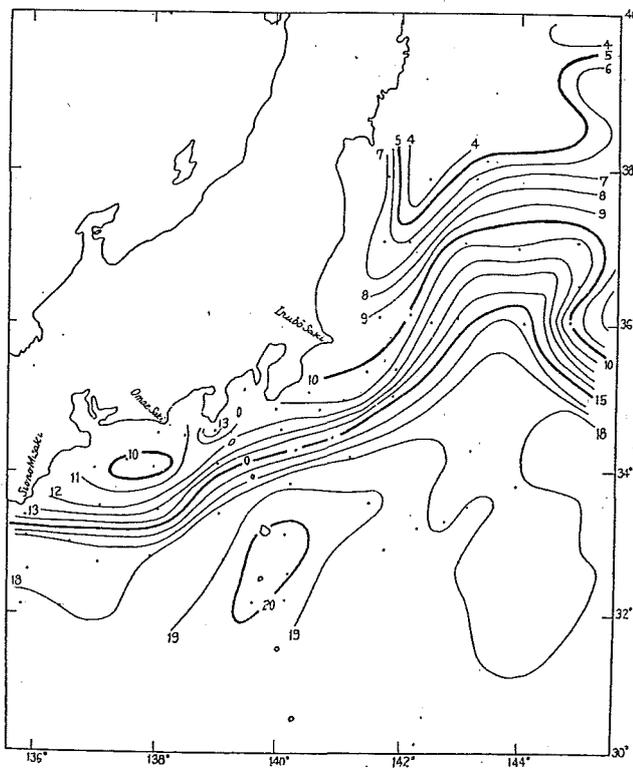


Abb. 4 (b)

Abb. 4 Horizontale Verteilung der Temperatur ($^{\circ}\text{C}$) an der 200m Tiefe beim Erschei-
nen der Kaltwassermasse
(a) Nov. 1959 (b) Aug. 1958

Aus den mehrfachen Seemessungen wird festgestellt, daß sich die Strömung anfängt intensiv zu schlängeln, erst nachdem sie das Kap (*Kap Choshi* beim Kuro시오, *cape Hatteras* beim Golfstrom) verlässt und ins offenen Meer hinein läuft. Bis *Cape Hatteras* sind die Stromlinien des Golfstroms schlicht und einfach entlang der Küste und beim Kuro시오 zeigen sie auch schwache Schlangenwindung bis zum *Kap Inubo* außer dem Gebiet, wo Anwachsen und Abklingen der oben erwähnten Kaltwassermasse erscheinen. Es zeigt die Einwirkung des Abstandes zwischen der Küste und Grundströmung auf die Entwicklung der Störungsbewegungen. Es scheint sehr wahrscheinlich, daß die Instabilität der Störungsbewegungen desto größer wird, je mehr der Abstand sich vergrößert. Abb. 4 zeigt Stromfelder Kurosios, in einem von diesen erscheint die große Kaltwassermasse.

2. Grundgleichung der Störungsbewegung im zweischichtigen Meer

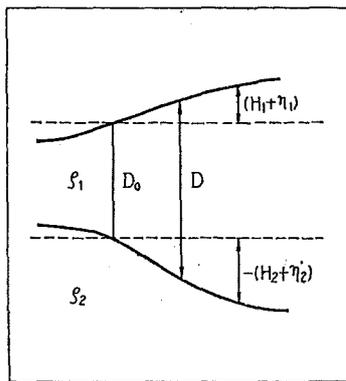


Abb. 5 Modell der Grundströmung in zwieschichtigen unendlich tiefen Meer

Wie in Abb. 5 gezeichnet wird, sei es zweischichtiges Meer, in welchem sich die Grundströmung nur in der oberen Schichte befindet. x -Achse werde nach Osten, y -Achse nach Norden und z -Achse dazu senkrecht nach oben orientiert auf der ungestörten Meeresoberfläche. Dabei ist vorausgenommen, daß die Geschwindigkeit der Grundströmung $U=U(y)$, $V=W=0$ ist. ρ_1 und ρ_2 zeigt die Dichte des oberen bzw. unteren Wassers. H_1 und H_2 sind die Abweichungen der Oberfläche bzw. Trennfläche von der ungestörten Fläche durch die Grundströmung. η_2 und η_1 sind die zusätzlichen Abweichungen durch die Störungsbewegungen. Vorausgesetzt, daß das Meer

unendlich tief ist, auf daß es keinen horizontalen Gradienten des Druckes in der unteren Schichte gibt. D ist die Tiefe der oberen Schichte, dessen normale Zustand D_0 ist.

Entsteht das quasistatische Gleichgewicht in der vertikalen Richtung und ist die Störungsbewegung unabhängig von der z -Achse, so nehmen die Bewegungsgleichungen der Störungen folgende Form

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right)u - f'v = -g' \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2.1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right)v + fu = -g' \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (2.2)$$

an. Die Kontinuitätsgleichung lautet

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right)\phi + \frac{\partial}{\partial x}(Du) + \frac{\partial}{\partial y}(Dv) = 0 \quad (2.3)$$

wo f' absolute Vorticity der Grundströmung und

$$\begin{aligned} f' &= f - \frac{dU}{dy} & f &= 2\omega \sin \varphi \\ g' &= bg & b &= \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} \\ \phi &= \eta_1 - \eta_2 \end{aligned}$$

ist. ω ist die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation und φ zeigt geographische Breite. Die Grundströmung ist geostrophisch und hat die Beziehung

$$U = -\frac{g'}{f} \frac{dD}{dy} \quad (2.4)$$

Da es in der unteren Schichte keinen Gradienten des Druckes gibt, ergeben sich die Gleichungen

$$\frac{dH_1}{dy} = b \frac{d}{dy} (H_1 - H_2); \quad \text{grad } \eta_1 = b \text{ grad } \varphi$$

Als die zusätzlichen Störungen stellen wir uns die fortschreitende Welle kleiner Amplitude vor

$$\begin{vmatrix} u \\ v \\ \phi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{\phi} \end{vmatrix} e^{i(\kappa x - \sigma t)}$$

wo κ Wellennummer und σ Frequenz zeigt.

Setzt man sie in Gl. (2.1) und Gl. (2.2) ein, so ergibt sich

$$\bar{u} = \frac{g'}{\omega^2 - ff'} \left[\kappa \omega \bar{\phi} + f' \frac{d\bar{\phi}}{dy} \right] \quad (2.5)$$

$$\bar{v} = \frac{-ig'}{\omega^2 - ff'} \left[\kappa f \bar{\phi} + \omega \frac{d\bar{\phi}}{dy} \right] \quad (2.6)$$

wobei aufs neue als $\omega = \sigma - \kappa U$ definiert wird. Damit geht Gl. (2.3) über in die Gleichung

$$\frac{d}{dy} \left[\frac{g' D}{\omega^2 - ff'} \frac{d\bar{\phi}}{dy} \right] + \left[1 - \frac{g' D}{\omega^2 - ff'} \kappa^2 + \frac{\kappa}{\omega} \frac{d}{dy} \left(\frac{g' D}{\omega^2 - ff'} f \right) \right] \bar{\phi} = 0 \quad (2.7)$$

Falls $\frac{dU}{dy} = 0$ ist, wird $\omega = \text{const.}$. Vernachlässigt man die Veränderung der

Coriolischen Parameter von der geographischen Breite, also ist $\frac{df}{dy} = 0$, so

nimmt Gl. (2.7) folgende Form

$$\frac{d}{dy} \left(D \frac{d\bar{\phi}}{dy} \right) + \left[\frac{\omega^2 - f^2}{g'} - \kappa^2 D + \frac{\kappa f}{\omega} \frac{dD}{dy} \right] \bar{\phi} = 0 \quad (2.8)$$

an.

Aus den mehrfachen Seemessungen wird festgestellt, daß das unter der Voraussetzung des geostrophischen Stroms gerechnete Stromfeld mit dem

durch GEK unmittelbar gemessenen Felde in gute Übereinstimmung gebracht wird. Mit aller Wahrscheinlichkeit darf man sagen, daß sich die Meeresströmung annäherungsweise quasigeostrophisch verhält. Nächstens sehen wir, wie die Gleichung unter der Bedingung der quasigeostrophischen Annäherung umgeformt wird.

Aus Gl. (2.1) und Gl. (2.2) ergibt sich die Wirbelgleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) Z + f' \operatorname{div}(Dv) + Dv \frac{df'}{dy} = g' \frac{dD}{dy} \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

wo

$$Z = \operatorname{rot} z(Dv).$$

ist. Setzt man die geostrophische Annäherung

$$u = -\frac{g'}{f} \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad v = \frac{g'}{f} \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

ein, so bekommt man folgende Gleichung mit Rücksicht auf Gl. (2.3)

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{D}{f} \frac{d\bar{\phi}}{dy} \right) - \frac{D}{f} \left[\kappa^2 + \frac{ff'}{g'D} + \frac{\kappa f}{\omega} \left(\frac{1}{f} \frac{df'}{dy} - \frac{1}{D} \frac{dD}{dy} \right) \right] \bar{\phi} = 0 \quad (2.9)$$

Sei $\frac{dU}{dy} = 0$, $\frac{df}{dy} = 0$, so geht sie über in die Gleichung

$$\frac{d}{dy} \left(D \frac{d\bar{\phi}}{dy} \right) + \left[-\frac{f^2}{g'} - \kappa^2 D + \frac{\kappa f}{\omega} \frac{dD}{dy} \right] \bar{\phi} = 0 \quad (2.10)$$

Vergleicht man Gl. (2.10) mit Gl. (2.8), so bemerkt man deutlich, daß die quasigeostrophische Annäherung diejenige Störungsbewegungen ausliest, die die Bedingung $\left(\frac{\omega}{f}\right)^2 \ll 1$ einhalten. Da $\omega = \sigma - \kappa U$ ist und die aus den Seemessungen in Frage gestellte Periode der Störungsbewegungen mehr als einige Tage ist, können sie annäherungsweise für quasigeostrophisch angesehen werden.

Vergleicht man Gl. (2.9) mit Gl. (2.7), so erkennt man wieder durch einfache Rechnung, daß diese Annäherung auch hier unter derselben Bedingung entsteht, weil unter der Annahme

$$\left| \frac{dU}{dy} \right| \ll f, \quad \left| \frac{d^2U}{dy^2} \right| \ll \beta$$

ist.
$$U \gg \frac{g'D}{ff'} \frac{df'}{dy} \sim \frac{g'D}{f^2} \beta \quad \left(\beta = \frac{df}{dy} \right)$$

Hier ist es zu beachten, daß das Verhältnis von der Veränderung der planetarischen Vorticity auf der y -Achse zu der des Gradienten der Trennfläche im Vergleich zu der potentiellen Vorticity sehr klein ist, also ist

$$\frac{\frac{df}{dy}}{\frac{dD}{dy}} \ll \frac{f + \zeta}{D}$$

Gl. (2.10) geht durch Gl. (2.4) über in die Gleichung

$$\frac{d}{dy} \left(D \frac{d\bar{\phi}}{dy} \right) - \left(\kappa^2 D + \frac{f^2}{g'} \frac{\sigma}{\omega} \right) \bar{\phi} = 0 \quad (2.11)$$

3. Effekt der Schichtenstruktur des Meeres und der Querscherung der Grundströmung auf der Instabilität der Störungsbewegung (Modell nach Stommel und Haurwitz & Panofsky)

Um die Wirkung der Schichtenstruktur des Meeres auf die Instabilität der Störungsbewegungen zu sehen, betrachtet Stommel (1953, 1955) die aus Gl. (2.8) abgeleitete Gleichung

$$\frac{\omega^2}{g'} - \kappa^2 D - \frac{f^2}{g'} \frac{\omega + \kappa U}{\omega} = 0 \quad (3.1)$$

Hier wird vorausgesetzt, daß sowohl Grundströmung als auch Störungsbewegung in der y -Richtung konstant bleibt, also daß $\frac{dU}{dy} = \frac{d\bar{\phi}}{dy} = 0$ ist.

Aus Gl. (2.4) ergibt sich

$$D = D_0 - \frac{fU}{g'} y$$

Weil er dabei $D = \text{const.}$ voraussetzt, muß der Gradient

$$\left| \frac{dD}{dy} \right| = \frac{fU}{g'} \quad (3.2)$$

im Gebiet, wo Gl. (3.1) gültig ist, so klein sein, daß man ihn vernachlässigen kann.

Da Gl. (3.1) kubische Gleichung von ω ist, besitzt sie konjugierte komplexe Wurzeln, wenn sich folgende Ungleichung ergibt

$$F > \frac{1}{2r} \left(\frac{2}{3} \right)^3 (1+r)^3 \quad (3.3)$$

wo F als interne Froudesche Nummer genannt wird und r/κ^2 sog. Rosbysche Deformationsradius zeigt.

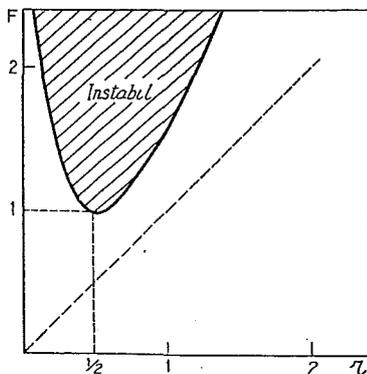


Abb. 6 Indifferenzkurve beim Stommelschen Modell

$$F = \frac{U^2}{g'D}, \quad r = \frac{g'D}{f^2} \kappa^2$$

Wie in Abb. 6 gezeichnet ist, wird die Störungsbewegung erst instabil, wenn $F \geq 1$ wird. Andererseits liefert uns Gl. (2.4)

$$F = - \frac{U}{fD} \frac{dD}{dy} \quad (3.4)$$

Da im instabilen Gebiet $F \geq 1$ ist, ergibt sich die Beziehung aus Gl. (3.4)

$$\left| \frac{dD}{dy} \right| \geq \frac{fD}{U} \sim 10^{-2} \quad (3.5)$$

Nämlich muß der Gradient der Trennfläche größer als 10^{-2} sein, um sich die Störungsbewegung zu vergrößern. Dann wird D nicht mehr konstant und die Gültigkeit der Gl. (3.1) wird verloren. Soviel Gl. (3.1) gültig ist, wird der Gradient klein und die Störungsbewegung bleibt stabil.

Die Voraussetzung, daß die Störungsbewegung in y -Richtung konstant bleibt, ist auch nicht annehmbar. Also enthält Gl. (3.1) folgende Voraussetzung

$$\frac{d}{dy} \left(D \frac{d\bar{\phi}}{dy} \right) \ll \kappa^2 D \bar{\phi} \quad (3.6)$$

Da die linke Seite wie folgt umgeformt wird

$$\frac{d}{dy} \left(D \frac{d\bar{\phi}}{dy} \right) \sim \frac{dD}{dy} \frac{d\bar{\phi}}{dy} \sim \frac{fU}{g'} \kappa \bar{\phi}$$

ergibt sich durch Gl. (3.6)

$$U \ll \frac{g'}{f} \kappa D$$

also

$$\frac{U^2}{g' D} \ll \frac{g' D}{f^2} \kappa^2$$

Nämlich ist Gl. (3.1) nur gültig, wenn $F \ll r$ ist, dann wird die Störungsbewegung immer stabil (Abb. 6). Also unter der Voraussetzung, daß sich Gl. (3.1) ergibt, bleibt die Störungsbewegung stabil.

Im §. 2 haben wir gezeigt, daß die Bedingung der quasigeostrophischen Annäherung, $\left(\frac{\omega}{f}\right)^2 \ll 1$, annehmbar ist in der Diskussion der Schlangewindung der Meeresströmung.

Weil $\omega = \sigma - \kappa U$ ist, zeigt die Bedingung folgende Beziehung

$$\left(\frac{\kappa U}{f}\right)^2 \ll 1$$

Aus Gl. (3.3) sehen wir, daß die Störungsbewegung instabil wird, wenn die Ungleichung

$$Fr \geq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^3 (1+r)^3 \geq \frac{4}{27}$$

entsteht. Da $Fr = \left(\frac{\kappa U}{f}\right)^2$ ist, bemerken wir deutlich, daß die instabile Störungsbewegung, auch wenn es möglich ist in dem Sinne von Stommel, nicht mehr gehorcht der Regel der quasigeostrophischen Annäherung. Tatsächlich liefert uns Gl. (2.11)

$$c = \frac{U}{1 + \frac{f^2}{g' D \kappa^2}} \quad (3.7)$$

Dies ist nicht anders als die mit der langsamen Geschwindigkeit fortschreitende neutrale Welle wegen der Schichtenstruktur des Meeres.

Hieraus ist zu sehen, daß die Störungsbewegung nicht instabil wird, wenn die Querscherung der Grundströmung vernachlässigt wird.

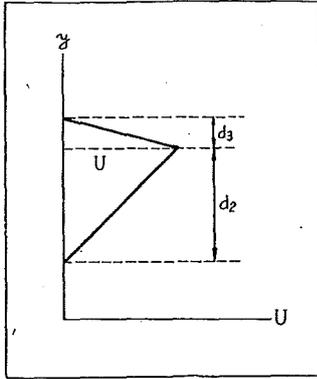


Abb. 7 Theoretisches Modell der Geschwindigkeitsverteilung in der zweidimensional quellfreien Bewegung von Haurwitz & Panofsky

In diesem Sinne ist wichtig das Modell nach Haurwitz & Panofsky. Sie setzen die Querscherung der Grundströmung wie Abb. 7 voraus im zweidimensionalen, homogenen Meer. Also haben sie die Bewegung als quellfrei und barotropisch angesehen. Dort sehen wir, daß die Querscherung an der nördlichen Seite größer als die an der südlichen Seite ist. Das entspricht dem Strömungsbau im wirklichen Meer.

Aus den Bewegungs- und Kontinuitätsgleichung haben wir

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} - \left(\kappa^2 - \frac{1}{c-U} \frac{d^2U}{dy^2} \right) \psi = 0 \quad (3.8)$$

wo ψ Stromfunktion der Störungsbewegung zeigt.

Das obige Modell der Grundströmung liefert uns folgende Gleichung, die Frequenzen zu bestimmen

$$p^3 - p^2 + Ap + B = 0 \quad (3.9)$$

wo

$$A = \zeta_2 + \zeta_3 - \frac{\zeta_2 \zeta_3}{IJ} - \frac{1}{2} \left(\frac{\zeta_3^2}{I} + \frac{\zeta_2^2}{J} \right)$$

$$B = \frac{\zeta_2 \zeta_3}{2IJ} (\zeta_2 + \zeta_3 - H)$$

$$I = 1 + a_3, \quad J = 1 + a_2, \quad H = a_2 + a_3$$

$$a_n = \coth \kappa d_n, \quad \zeta_n = \frac{1}{\kappa d_n}$$

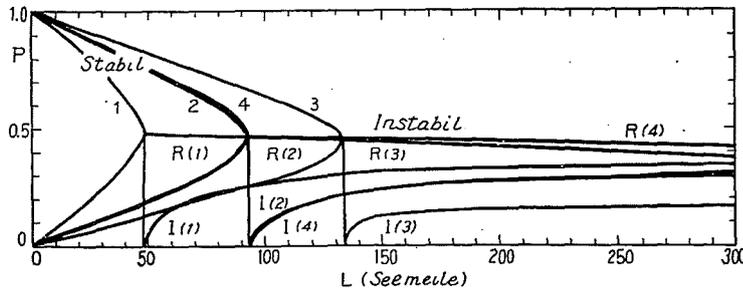


Abb. 8 Indifferenzkurve beim Haurwitz & Panofskyschen Modell

	d_2	d_3
1	100 Meilen	10 Meilen
2	100	20
3	100	30
4	150	20

ist. Abb. 8 zeigt die Wurzel von Gl. (3.9) in einigen Fällen, welche die aus den Seemessungen im Gebiet der Schlangenwindung im Kurosio festgestellten Zustände umfassen (Koizumi, 1956). Daraus folgt, daß $c_r/U_{\max} \sim 0.4$ und $c_i/U_{\max} \sim (0.2 \sim 0.4)$ für die Störungsbewegung der Wellenlänge 300 Seemeilen. Angenommen, daß $U_{\max} \sim 10^2$ cm/sec ist, wird Periode der Störungsbewegung etwa

$$T = \frac{L}{c} \sim 15 \text{ Tage}$$

und binnen 1~3 Tagen vergrößert sich die Amplitude 2.72 fach.

Fuglister & Worthington (1951, 1954) haben aus der Analyse der wertvollen Seemessungen im Golfstrom in 1950 bestätigt, daß die Störungswelle mit der Geschwindigkeit etwa 11 Seemeilen pro Tag nach Osten fortschritt, dagegen daß die Strömung mit der Geschwindigkeit mehr als hundert Seemeilen pro Tag läuft, und daß sich die Amplitude der Schlangenwindung etwa in zwei Wochen verdoppelt. Daraus folgt, daß sowohl c_r/U_{\max} als auch c_i/U_{\max} sehr klein, vielleicht kleiner als 0.1 ist. Soviel als man also quellfreies, barotropisches Modell braucht, ist es schwierig und misslich, eine passende Phasengeschwindigkeit und Instabilität der Störungsbewegung zu bekommen.

Um die Wirkung der Strömungsbreite zu sehen, nehmen wir einfaches Modell der Grundströmung wie Abb. 9 an. Daraus ergibt sich die Frequenzgleichung

$$\left[1 + \left(\frac{p}{p-1}\right)^2\right]^2 - \left[1 - \left(\frac{p}{p-1}\right)^2\right]^2 e^{-2\kappa L} = 0 \quad (3.10)$$

wo $p = \frac{c}{U}$ ist. Man erhält damit

$$p = \frac{\delta_n \pm i\sqrt{\delta_n}}{1 + \delta_n}$$

wo $\delta_1 = \coth \kappa L$, $\delta_2 = \tanh \kappa L$ ist.

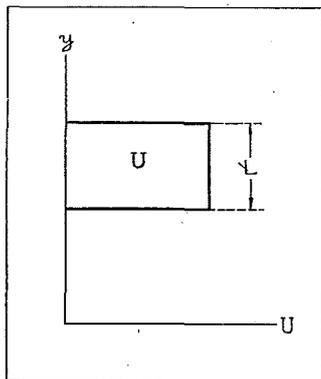


Abb. 9 Ein Modell der Geschwindigkeitsverteilung in der zwei-dimensional quellfreien Bewegung

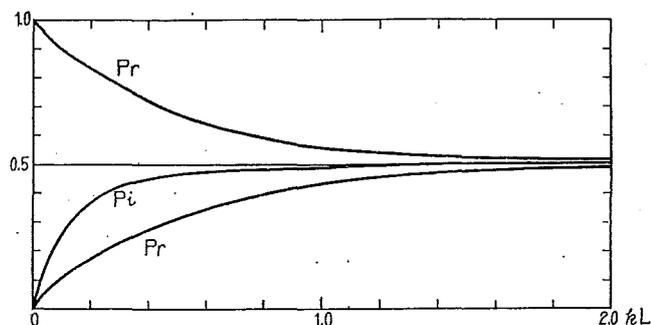
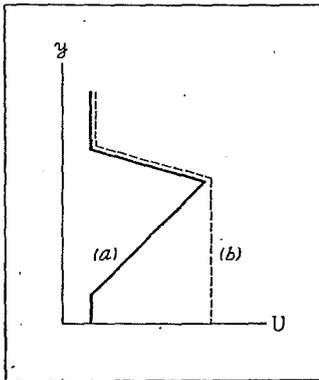


Abb. 10 Phasengeschwindigkeit und Instabilität beim Modell in Abb. 9

Aus Abb. 10 findet man also, daß sowohl Phasengeschwindigkeit als auch Instabilität schnell konvergiert zum Grenzwert, welches im Falle der unendlichen Strömungsbreite auftritt. Um p kleiner als 0.1 zu bleiben, muß κL auch kleiner als 0.1 sein. Da $\kappa \sim 10^{-7}$ ist, wird L etwa 10km. Die Strömungsbreite wird zu schmal.

Wie in Abb. 11 gezeichnet werden, haben Haurwitz & Panofsky zweierelei



verschiedene Modelle angenommen. Beim Modell (a) erkennt man außer intensiver Querschering an der nördlichen Seite langsamen Abfall der Grundströmung an der südlichen Seite, welche beim Modell (b) nicht zu bemerken ist. Nach ihrer Rechnung mit geeigneten numerischen Werten für die Geschwindigkeit und den Gradienten der Grundströmung ist die Eigentümlichkeit der Instabilität bei beiden Modellen ähnlich. Daraus sehen wir, daß der langsame Abfall der Grundgeschwindigkeit an der südlichen Seite beim Anwachsen der Störungsbewegungen nicht wesentliche Rolle spielt. Dies sehen wir auch daraus, daß beim vorigen Modell (Abb. 10) die Breite annäherungsweise als unendlich groß angesehen werden kann, wenn $\kappa L > 1$ wird.

Abb. 11 Modell der Geschwindigkeitsverteilung von Haurwitz & Panofsky. (a) mit der langsamen Abklingen der Geschwindigkeit an der stromabwärts rechten Seite (b) ohne Gradienten der Geschwindigkeit an der rechten Seite

Damit sehen wir, daß das quellfreie, barotropische Modell nicht geeignet ist für die Stabilitätstheorie der Meeresströmung.

4. Die auf der Grundströmung gestellte Bedingung zum Anwachsen der Störungsbewegung und die Wirkung der Schichtdicke der Grundströmung.

Es sei zweischichtiges, unendlich tiefes Meer, wo es die Grundströmung nur in der oberen Schichte gebe. Es sei auch das Meer begrenzt zwischen $y=y_1$ und $y=y_2$. Nun setzen wir hier voraus, daß die Grundgeschwindigkeit nach Süden monoton anwächst. (1) *Instabile Störung*: Da wir die Störungsbewegung der längeren Periode betrachten, vernachlässigen wir in Gl. (2.7) ω^2 gegen ff' , so bekommen wir folgende Gleichung

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{D}{ff'} \frac{d\bar{\phi}}{dy} \right) - Q(y)\bar{\phi} = 0 \tag{4.1}$$

wo

$$Q(y) = \frac{D}{ff'} \kappa^2 + \frac{1}{g'} + \frac{1}{c-U} \frac{D^2}{f'^2} \frac{d}{dy} \left(\frac{f'}{D} \right)$$

ist. Randbedingung lautet aus Gl. (2.6) durch quasigeostrophische Annäherung

$$\bar{v} = \frac{ig'}{f'} \left[\kappa \bar{\phi} + \frac{\omega}{f} \frac{d\bar{\phi}}{dy} \right] = 0 \quad (y=y_1, y_2) \quad (4.2)$$

Multipliziert man Gl. (4.1) mit dem konjugierten Komplex und integriert man sie von y_1 bis y_2 , so haben wir in Rücksicht auf Gl. (4.2)

$$\int_{y_1}^{y_2} Q_i |\bar{\phi}|^2 dy = \left| \frac{D}{f'} \frac{c_i}{|U-c|^2} |\bar{\phi}|^2 \right|_{y_1}^{y_2} \quad (4.3)$$

$$\int_{y_1}^{y_2} \left[\frac{D}{ff'} \left| \frac{d\bar{\phi}}{dy} \right|^2 + Q_r |\bar{\phi}|^2 \right] dy = \left| \frac{D}{f'} \frac{(U-c_r)}{|U-c|^2} |\bar{\phi}|^2 \right|_{y_1}^{y_2} \quad (4.4)$$

wo

$$\begin{cases} Q_i = -\frac{D^2}{f'^2} \frac{c_i}{|U-c|^2} \frac{d}{dy} \left(\frac{f'}{D} \right) \\ Q_r = \frac{D}{ff'} \kappa^2 + \frac{1}{g'} + \frac{(U-c_r)}{c_i} Q_i \end{cases}$$

ist. Nun bezeichnen wir die Grundgeschwindigkeit an den beiden Rändern als U_n ($n=1,2$), so bekommen wir folgende Beziehung, indem wir Gl. (4.3) mit $(U_n - c_r)$ multiplizieren und daraus Gl. (4.4) subtrahieren.

$$\begin{aligned} & \int_{y_1}^{y_2} \frac{D^2}{f'^2} \frac{(U-U_n)}{|U-c|^2} \frac{d}{dy} \left(\frac{f'}{D} \right) \cdot |\bar{\phi}|^2 dy \\ &= \int_{y_1}^{y_2} \left[\frac{D}{ff'} \left(\kappa^2 |\bar{\phi}|^2 + \left| \frac{d\bar{\phi}}{dy} \right|^2 \right) + \frac{|\bar{\phi}|^2}{g'} \right] dy + \left| \frac{D}{f'} \frac{(U_n-U)}{|U-c|^2} |\bar{\phi}|^2 \right|_{y_1}^{y_2} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Da $f' > 0$, $U_1 > U > U_2$ ist, bleibt die rechte Seite immer positiv. Somit muß es irgendein Punkt im Grundgebiet geben, wo

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{f'}{D} \right) = 0 \quad y=y_0 \quad (4.6)$$

ist. Weil f'/D sog. *potentielle Vorticity* ist, zeigt Gl. (4.6) die Bedingung, daß die *potentielle Vorticity* im Grundgebiet Extrema annehmen muß, um sich die Störungsbewegung zu vergrößern. Im Falle der zweidimensional quellfreien Bewegung haben wir statt Gl. (4.6) folgende Beziehung wie Kuo (1949)

$$\frac{d}{dy} f' = 0 \quad y=y_0$$

Also müssen wir im zweischichtigen, baroklinischen Meer senkrecht zur Stromlinie die Veränderung der potentiellen Vorticity betrachten statt die der absoluten Vorticity, um die Instabilität der Störungsbewegung zu forschen.

Aus Gl. (4.3) ergibt sich auch

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{D}{f'} \frac{d}{dy} \left[\frac{|\bar{\phi}|^2}{|U-c|^2} \right] dy = 0$$

Es zeigt, daß das Verhältnis von der Störungsenergie zu der mit Störungswelle in Beziehung stehenden Grundströmungsenergie auch im Grundgebiet Extremwert annimmt.

Man sieht auch leicht, daß die Phasengeschwindigkeit der Störungswelle zwischen der maximalen und minimalen Grundgeschwindigkeit liegt. Also ergibt sich hier

$$\frac{d}{dy} \left[\frac{|\bar{\phi}|^2}{|U-c|^2} \right] = \frac{1}{|U-c|^4} \left[|U-c|^2 \frac{d}{dy} |\bar{\phi}|^2 - 2(U-c_r) \frac{dU}{dy} \cdot |\bar{\phi}|^2 \right]$$

An beiden Rändern ergibt sich

$$\frac{d}{dy} |\bar{\phi}|^2 = 2f |\bar{\phi}_n|^2 \frac{(U_n - c_r)}{|U_n - c|^2} \quad (n=1,2)$$

Somit haben wir an den Rändern

$$\frac{d}{dy} \left[\frac{|\bar{\phi}|^2}{|U-c|^2} \right]_{\text{Rande}} = \frac{2|\phi_n|^2}{|U_n - c|^4} f'_n (U_n - c_r) \quad (n=1,2)$$

Da sich das Vorzeichen der linken Seite an beiden Rändern wechselt, muß $(U_n - c_r)$ auch sein Vorzeichen wechseln, also

$$U_2 < c_r < U_1$$

wo U_1 und U_2 die Grundgeschwindigkeit an der Rande zeigt. (2) *Neutrale Störung*: Wenn in Gl. (4.3) $c_i \rightarrow 0$ wird, ergibt sich

$$P \int_{y_1}^{y_2} Q_i |\bar{\phi}|^2 dy + \int_{y_{o-\epsilon}}^{y_{o+\epsilon}} Q_i |\bar{\phi}|^2 dy = 0 \quad (4.7)$$

Das erste Glied ist der Hauptwert des Cauchyschen Integrals und wird null falls $c_i \rightarrow 0$ konvergiert. Das zweite Glied wird nach der Potentialtheorie*

$$\begin{aligned} \lim_{c_i \rightarrow 0} \int_{y_{o-\epsilon}}^{y_{o+\epsilon}} \frac{c_i \frac{D^2}{f'^2} \frac{d}{dy} \left(\frac{f'}{D} \right)}{(c_r - U)^2 + c_i^2} |\bar{\phi}|^2 dy &= \lim_{c_i \rightarrow 0} \int_{y_{o-\epsilon}}^{y_{o+\epsilon}} \frac{c_i}{\left(\frac{dU}{dy} \right)} \frac{\frac{D^2}{f'^2} \frac{d}{dy} \left(\frac{f'}{D} \right)}{(c_r - U)^2 + c_i^2} |\bar{\phi}|^2 dU \\ &= -\pi \frac{\left(\frac{D^2}{f'^2} \right)_c \left[\frac{d}{dy} \left(\frac{f'}{D} \right) \right]_c}{\left(\frac{dU}{dy} \right)_c} |\bar{\phi}_o|^2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Weil die Grundgeschwindigkeit monoton ist, haben wir einziges kritisches Punkt und dort muß es folgende Gleichung geben, um die neutrale Störungsbewegung zu existieren

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{f'}{D} \right) = 0 \quad y = y_o \quad (4.9)$$

Nun formen wir Gl. (4.1) folgendermaßen um, falls die Bedingung (4.9) erfüllt ist

* Aus Potentialtheorie haben wir folgendes Integral

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{yf(\xi)}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi = -\pi f(x)$$

wobei

$$y > 0 \quad \xi_2 < x < \xi_1$$

ist.

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{D}{ff'} \frac{d\bar{\phi}_c}{dy} \right) + \frac{D}{ff'} \lambda \bar{\phi}_c - q(y) \bar{\phi}_c = 0 \quad (4.10)$$

wo

$$\begin{cases} q(y) = \frac{1}{g'} + \frac{1}{U_c - U} \frac{D^2}{f'^2} \frac{d}{dy} \left(\frac{f'}{D} \right) \\ \lambda = -\kappa^2 \end{cases}$$

ist. Aber hier garantiert nicht immer Sturm'sches Schwingungstheorem** die Existenz des negativen Eigenwert λ , wenn auch $q(y)$ negativ wird. Setzen wir aber jetzt die Existenz der neutralen Welle voraus und bezeichnen wir sie als ϕ_c , λ_c und die kritische Geschwindigkeit als U_c , so haben wir aus Gl. (4.10) und Gl. (4.1) folgende Beziehung

$$\begin{aligned} (U_c - c) \left| \frac{D}{f'} \frac{\bar{\phi} \bar{\phi}_c}{(U - c)(U - U_c)} \right|_{y_1}^{y_2} + (\lambda_c - \lambda) \int_{y_1}^{y_2} \frac{D}{ff'} \bar{\phi} \bar{\phi}_c dy = \\ = (U_c - c) \int_{y_1}^{y_2} \frac{-D^2}{f'^2} \frac{d}{dy} \left(\frac{f'}{D} \right) \bar{\phi} \bar{\phi}_c dy \end{aligned} \quad (4.11)$$

Am Grenzfalle $\lambda \rightarrow \lambda_c$, $c \rightarrow U_c$, $\phi \rightarrow \phi_c$, nimmt Gl. (4.11) die Form

$$\lim_{c \rightarrow U_c} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\Psi(y)}{(U - c)} \bar{\phi}_c^2 dy = \left(\frac{d\lambda}{dc} \right)_c \int_{y_1}^{y_2} \frac{D}{ff'} \bar{\phi}_c^2 dy + \left| \frac{D}{f'} \frac{\bar{\phi}_c^2}{(U - U_c)^2} \right|_{y_1}^{y_2} \quad (4.12)$$

an. Dabei ist

$$\Psi(y) = \frac{-D^2}{f'^2} \frac{d}{dy} \left(\frac{f'}{D} \right) \frac{1}{U - U_c} \quad (4.13)$$

wie oben erwähnt ergibt sich

$$\lim_{c \rightarrow U_c} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\Psi(y)}{U - c} \bar{\phi}_c^2 dy = P \int_{y_1}^{y_2} \frac{\Psi(y)}{U - U_c} \bar{\phi}_c^2 dy - i\pi \frac{\Psi_c}{\left(\frac{dU}{dy} \right)_c} \bar{\phi}_c^2$$

Somit bekommen wir aus Gl. (4.12)

$$\left(\frac{dc}{d\lambda} \right)_c = \frac{(B - E) + iF}{(B - E)^2 + F^2} \cdot A \quad (4.14)$$

wo

$$A = \int_{y_1}^{y_2} \frac{D}{ff'} \bar{\phi}_c^2 dy \quad ; \quad E = \left| \frac{D}{f'} \frac{\bar{\phi}_c^2}{|U - U_c|^2} \right|_{y_1}^{y_2}$$

** Sei gegeben die Gleichung

$$\frac{d}{dx} \left(p \frac{dy}{dx} \right) + \lambda \rho y - q y = 0$$

und Randbedingung dazu

$$\left. \begin{aligned} y(x_2) + \alpha y'(x_2) &= 0 \\ y(x_1) - \beta y'(x_1) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad x_2 > x_1$$

wo $p > 0$, $\rho > 0$ ist. Dann wird der Eigenwert λ positiv falls $q > 0$ ist.

$$B = P \int_{y_1}^{y_2} \frac{\Psi(y)}{(U - U_0)} \bar{\phi}_0^2 dy \quad ; \quad F = \pi \frac{\Psi_0}{\left(\frac{dU}{dy}\right)_0} \bar{\phi}_0^2$$

ist. Weil $\left(\frac{dU}{dy}\right) < 0$, $\Psi_0 < 0$ ist, bleibt F immer positiv. Somit sehen wir, daß die Störungsbewegung der längeren Wellenlänge als die neutrale Welle instabil wird in der Nähe des kritischen Punkts. Wenn es sich um zweidimensional quellfreies Feld handelt, nimmt die benachbarte instabile Welle Kuosche Form an (Kuo, 1949).

Es ist hier zu bemerken, daß es den Fall gibt, in welchem die Verteilung der potentiellen Vorticity glätter wird, wenn auch die absolute Vorticity scharfe Extremwert annimmt. Also wird die Instabilität dabei kleiner als die der quellfreien Bewegung wegen der Schichtenstruktur des Meeres.

Falls die potentielle Vorticity überall konstant ist, erlaubt Gl. (4.1) keine Störungsbewegung. Nach Stommel (1955) ist die potentielle Vorticity im nordatlantischen Ozean ungefähr konstant. Das ist selbstverständlich, weil sie nicht anders als der aus lange Zeit gebrauchten Seemessungen gerechnete Mittelwert ist. Dabei wird die Störungsbewegung ausgesondert.

Ob die Querverteilung der potentiellen Vorticity im *Kurosio* bzw. Golfstrom scharfen Extremwert zeigt ehe die Schlangenwindung erscheint, wie die Verteilung der absoluten Vorticity in der Atmosphäre im Westwind scharfes Maximum annimmt vor dem sog. "Delta-störung" (Kuo, 1949), ist noch nicht klar festgestellt, weil wir bis jetzt noch keine genaue, simultane Seemessungen vor dem Anwachsen der Schlangenwindung haben. Eine grobe Schätzung wird aber am Ende des §. 5 gezeigt.

5. Rechnung der Instabilität im konkreten Modell.

(ia) Erstens betrachten wir einfaches Modell. Wie in Abb. 12 gezeigt wird,

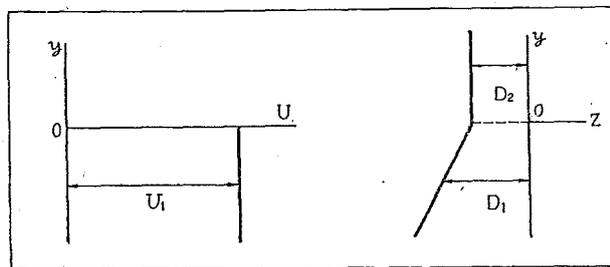


Abb. 12 Modell der Geschwindigkeitsverteilung im zweischichtigen Meer mit der unendlich ausgedehnten Strömung.

ist das Meer in zwei Teile eingeteilt, wo die Grundgeschwindigkeit nur in der Halbebene ($y < 0$) vorhanden ist mit der konstanten Geschwindigkeit ($U = \text{const.}$). Es sei auch das Meer unendlich ausgedehnt wie im Bild gezeichnet ist. Die innere Trennfläche ist konstant in der nördlichen

Halbebene und in der südlichen Halbebene linear anwächst. Setzt man $f=const.$ voraus, so ergibt sich die Gleichung

$$\frac{d}{dy} \left(D_1 \frac{d\bar{\phi}_1}{dy} \right) - \left(\kappa^2 D_1 + \frac{f^2}{g'} \frac{\sigma}{\omega} \right) \bar{\phi}_1 = 0 \quad (y < 0) \quad (5.1.1)$$

$$\frac{d^2}{dy^2} \bar{\phi}_2 - \left(\kappa^2 + \frac{f^2}{g' D_2} \right) \bar{\phi}_2 = 0 \quad (y > 0) \quad (5.1.2)$$

wo

$$\begin{cases} D_1 = D_2 - s'y & ; \quad s' = \frac{s}{a} & ; \quad a = \frac{\rho_1}{\rho_2} \\ H_2 = sy \end{cases}$$

ist. Randbedingung lautet aus der Forderung, daß der Druck an der Grenzfläche kontinuierlich ist.

$$\begin{cases} i\omega(\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_2) + s'v_1 = 0 \\ i\sigma(\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_2) + s'v_2 = 0 \end{cases} \quad (y=0) \quad (5.1.3)$$

Natürlich muß die Störungsbewegung begrenzt bleiben, wenn $y = \pm\infty$ wird.

Die Grundleistung von Gl. (5.1.1) lautet

$$\bar{\phi}_1 = x^{-\frac{1}{2}} [AW_{p,o}(x) + A'M_{p,o}(x)] \quad (5.1.4)$$

Dabei ist

$$\begin{cases} x = \frac{2\kappa}{s'} (D_2 - s'y) \\ p = -\frac{1}{2} \frac{f}{\kappa U} \frac{\sigma}{\omega} \end{cases}$$

$M_{p,o}(x)$ und $W_{p,o}(x)$ zeigen die Grundleistungen der Whittakerschen Gleichung

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{p}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \Psi = 0$$

und sie nehmen die Form

$$\begin{cases} M_{p,o}(x) = x^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \Phi(\alpha, x) \\ W_{p,o}(x) = x^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \Psi(\alpha, x) \end{cases}$$

an, wo

$$\begin{cases} \Phi(\alpha, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} x^n \\ \Psi(\alpha, x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \Phi(\alpha, x) [2\psi(n+1) - \psi(n+\alpha) - \ln x] \\ \alpha = \frac{1}{2} - p, \quad \psi(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \Gamma(\alpha), \quad r = -\psi(1) \end{cases}$$

ist. Diese Funktion verhält sich asymptotisch

$$x \rightarrow \infty \begin{cases} x^{-\frac{1}{2}} M_{p,o}(x) \sim \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{\frac{x}{2}} \left\{ 1 + \frac{(1-\alpha)^2}{x} + \dots \right\} \\ x^{-\frac{1}{2}} W_{p,o}(x) \sim x^{-\alpha} e^{-\frac{x}{2}} \left\{ 1 - \frac{\alpha^2}{x} + \dots \right\} \end{cases} \quad (5.1.5)$$

$$x \rightarrow 0 \begin{cases} x^{-\frac{1}{2}} M_{p,o}(x) \sim e^{-\frac{x}{2}} \{ 1 + \alpha x + \dots \} \\ x^{-\frac{1}{2}} W_{p,o}(x) \sim \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\Gamma(\alpha)} \ln \frac{1}{x} + \dots \end{cases} \quad (5.1.6)$$

Somit nimmt die Lösung (5.1.4), welche die Randbedingung für $y = -\infty$ erfüllt, die Form

$$\bar{\phi}_1 = A x^{-\frac{1}{2}} W_{p,o}(x) \quad (5.1.7)$$

an. Ebenfalls ergibt sich die Lösung von Gl. (5.1.2), welche die Randbedingung für $y = \infty$ erfüllt

$$\bar{\phi}_2 = B e^{-\kappa y} \quad (5.1.8)$$

wo

$$q = \sqrt{1 + \frac{f^2}{g'D_2 \kappa^2}}$$

ist. Aus Gl. (2.6) ergibt sich die Störungsgeschwindigkeit in der quasigeostrophischen Annäherung

$$\begin{cases} v_1 = \frac{ig'}{f} \left[\kappa \bar{\phi}_1 + \frac{\omega}{f} \frac{d\bar{\phi}_1}{dy} \right] \\ v_2 = \frac{ig'}{f} \left[\kappa \bar{\phi}_2 + \frac{\sigma}{f} \frac{d\bar{\phi}_2}{dy} \right] \end{cases} \quad (5.1.9)$$

Setzt man (5.1.7), (5.1.8) und (5.1.9) in Gl. (5.1.3) ein, so bekommt man folgende charakteristische Gleichung

$$\frac{\sqrt{F}}{2} + \frac{\sqrt{1+r} z^2}{1 - \sqrt{F} \sqrt{1+r} z} = 2\sqrt{r} \frac{W'_{p,o}(x_0)}{W_{p,o}(x_0)} \quad (5.1.10)$$

wo

$$F = \frac{U^2}{g'D_2} \quad ; \quad r = \frac{g'D_2 \kappa^2}{f^2} \quad ; \quad z = \frac{c}{U-c}$$

$$x_0 = (x)_{y=0} = \frac{2\kappa D}{s'} = 2\sqrt{\frac{r}{F}} \quad , \quad W'_{p,o}(x_0) = \left[\frac{dW_{p,o}(x)}{dx} \right]_{x=x_0}$$

ist. Da Gl. (5.1.10) kompliziert ist, betrachten wir erstens wie sie sich verhält, wenn D_2 unendlich groß wird. Physikalisch gesehen ist das der Fall der barotropisch quellfreien Bewegung.

Aus der asymptotischen Entwicklung (5.1.5) haben wir

$$\frac{W'_{p,o}(x_0)}{W_{p,o}(x_0)} \sim \left(\frac{p}{x_0} - \frac{1}{2} \right) + \frac{\alpha^2}{x_0^2} + \dots$$

Setzt man in Gl. (5.1.10) ein, so ergibt sich näherungsweise

$$z^2 - \left(\sqrt{Fr} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{1}{\sqrt{1+r}} + \frac{F}{2} \right) z + \sqrt{\frac{r}{1+r}} = 0 \quad (5.1.11)$$

Daraus bekommen wir

$$\left\{ s_r = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1 - \sqrt{\frac{r}{1+r}}}{1 + \sqrt{\frac{r}{1+r}} + A} \right] < \frac{1}{2} \right. \quad (5.1.12)$$

$$\left. \left\{ s_i = \frac{1}{2} \left[\frac{4\sqrt{\frac{r}{1+r}} - A^2}{\left(1 + \sqrt{\frac{r}{1+r}} + A\right)^2} \right]^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{2} \right. \right. \quad (5.1.13)$$

wo

$$s = \frac{c}{U}, \quad A = \sqrt{Fr} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{1}{\sqrt{1+r}} + \frac{F}{2}$$

ist. In der barotropisch quellfreien Bewegung nehmen sowohl s_r als auch s_i den Wert 0.5, wie wir in Abb. 10 sehen. (5.1.12) und (5.1.13) zeigen, daß sie asymptotisch nach 0.5 konvergieren falls D_2 unendlich groß wird.

Es ist hier zu beachten, daß die asymptotische Entwicklung erst möglich ist, wenn $x \gg 1$ wird. Nehmen wir an, $\sqrt{Fr} = \frac{\kappa U}{f} = 0.1$ $x = 2\sqrt{\frac{r}{F}} \sim 10$, so ergibt sich $F \sim 0.02$. Da F interne Froudesche Nummer ist, haben wir im wirklichen Meer physikalisch betrachtet $F \sim 1$. Daraus sehen wir, daß die Schichtenstruktur des Meeres wesentliche Rolle spielt im Instabilitätscharakter.

Nächstens betrachten wir anderen Grenzfall, wo D_2 sehr kleiner wird. Aus (5.1.6) und Gl. (5.1.10) haben wir annäherungsweise

$$2z^2 + Fz - \sqrt{F} = 0 \quad (5.1.14)$$

Somit wird z reell und wir bekommen

$$s = \frac{\frac{F}{4} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{F}} \right)^3} - 1 \right)}{1 + \frac{F}{4} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{F}} \right)^3} - 1 \right)} \quad (5.1.15)$$

Wenn D_2 sehr kleiner wird, wird die Störungsbewegung stabil und je mehr D_2 kleiner wird, desto wird die Phasengeschwindigkeit auch kleiner.

Nun zeigen wir, daß es keine Störungswelle gibt, welche größere Phasengeschwindigkeit als U hat. Es sei $c > U$, so ergibt sich

$$z = \frac{c}{U - c} < 0 \quad |z| > 1$$

Bezeichnen wir jetzt

$$z' = -z$$

$$p' = -p = \frac{1}{2} \frac{z'}{\sqrt{Fr}}$$

Unter den Bedingungen $|p'| \gg 1, x; |\text{Arg}(p')| \leq \frac{\pi}{2}$ ergibt sich die asymptotische Entwicklung

$$W_{-p',0}(x) \approx \left(\frac{x}{4p'}\right)^{\frac{1}{4}} e^{p'-p' \log p' - 2\sqrt{p'}\sqrt{x}}$$

Setzt man in Gl. (5.1.10) ein, so ergibt sich

$$\frac{\sqrt{F}}{4} + \frac{\sqrt{1+rz^2}}{1+\sqrt{F}\sqrt{1+rz^2}} + \sqrt{z'} = 0 \quad (5.1.16)$$

nämlich hat sie keine reell positive Wurzel. Da die reell negative Wurzel der Voraussetzung $c > U$ widerspricht und komplexe Wurzel kein reell positives Teil hat, erlaubt das System keine Störungsbewegung, deren Phasengeschwindigkeit größer als U ist.

Aus den obigen Betrachtung ist es zu sehen, daß sowohl s_r als auch s_i kleiner als 0.5 sind, welche in der barotropisch quellfreien Bewegung auftritt. Wenn wir tatsächlich voraussetzen, daß $|z| > 1, s_i > \frac{1}{2}$ ist, so ergibt sich aus Definition

$$|p| = \frac{1}{2} \frac{|z|}{\sqrt{Fr}} \gg 1$$

Für $|p| \gg x, |\text{Arg}(z)| \leq \frac{\pi}{2}$ haben wir folgende asymptotische Entwicklung

$$W_{p,0}(x) \approx -\left(\frac{4x}{p}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-p+p \log p} \sin\left(2\sqrt{p}\sqrt{x} - p\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

Stzt man in Gl. (5.1.10) ein, so bekommt man

$$\frac{\sqrt{F}}{4} + \frac{\sqrt{1+rz^2}}{1-\sqrt{F}\sqrt{1+rz^2}} = \sqrt{z} \cot\left(\frac{2}{\sqrt{F}}\sqrt{z} - \frac{\pi}{2} \frac{z}{\sqrt{Fr}} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (5.1.17)$$

Daraus sehen wir, daß es unendlich viele reelle Wurzeln geben für ein paar F und r . So haben wir unendlich viele neutral Störungswellen. Das ist physikalisch widerspruchsvoll.

In unserem Fall hat die potentielle Vorticity scharfe maximale Spitze an der Grenzfläche, wenn man die Verteilung der Grundgeschwindigkeit an der Grenzfläche stetig macht. Wenn aber $D_2 \rightarrow 0$ konvergiert, so strebt die Spitze hin zu verschwinden und wir bekommen damit schwache Instabilität. (ib) Wenn man die Breite der Grundströmung in Betracht zieht, bekommt man die charakteristische Gleichung folgendermaßen. Also ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{cases} \frac{d^2\bar{\phi}_2}{dy^2} - \left(\kappa^2 + \frac{f^2}{g'D_2}\right) \bar{\phi}_2 = 0 & ; y > 0 \\ \frac{d}{dy} \left(D_1 \frac{d\bar{\phi}_1}{dy}\right) - \left(\kappa^2 D_1 + \frac{f^2}{g'} \frac{\sigma}{\omega}\right) \bar{\phi}_1 = 0 & ; 0 > y > -L \\ \frac{d^2\bar{\phi}_3}{dy^2} - \left(\kappa^2 + \frac{f^2}{g'D_3}\right) \bar{\phi}_3 = 0 & ; y < -L \end{cases} \quad (5.1.18)$$

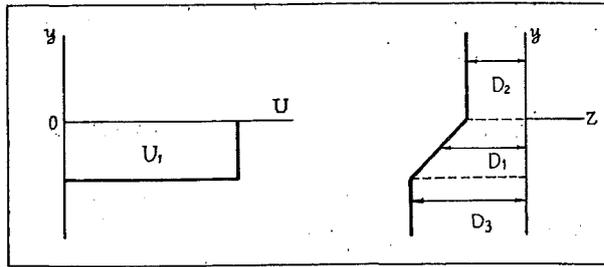


Abb. 13 Dasselbe Modell falls die Breite der Grundströmung begrenzt bleibt.

Daraus bekommen wir die Lösungen, welche die Randbedingungen für $y = \pm \infty$ erfüllen

$$\begin{cases} \bar{\phi}_2 = B_2 e^{-q_2 y} \\ \bar{\phi}_1 = x^{-\frac{1}{2}} (A_1 M_{p,o}(x) + B_1 W_{p,o}(x)) \\ \bar{\phi}_3 = A_3 e^{q_3 y} \end{cases} \quad (5.1.19)$$

wobei

$$\begin{aligned} D_1 &= D_2 - s'y & ; & & D_3 &= D_2 + s'L \\ \left\{ \begin{aligned} q_2 &= \sqrt{1 + \frac{1}{r_2}} & ; & & q_3 &= \sqrt{1 + \frac{1}{r_3}} \\ r_2 &= \frac{g'D_2 \kappa^2}{f^2} & ; & & r_3 &= \frac{g'D_3 \kappa^2}{f^2} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

ist. Als Randbedingungen an den zwei Grenzflächen haben wir

$$\begin{cases} \left. \begin{aligned} i\omega(\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_2) + s'v_1 &= 0 \\ i\sigma(\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_2) + s'v_2 &= 0 \end{aligned} \right\} & (y=0) \\ \left. \begin{aligned} i\sigma(\bar{\phi}_3 - \bar{\phi}_1) - s'v_3 &= 0 \\ i\omega(\bar{\phi}_3 - \bar{\phi}_1) - s'v_1 &= 0 \end{aligned} \right\} & (y=-L) \end{cases} \quad (5.1.20)$$

Die Störungsgeschwindigkeiten nehmen die Formen

$$\begin{cases} v_2 = \frac{ig'}{f} \left(\kappa \bar{\phi}_2 + \frac{\sigma}{f} \frac{d\bar{\phi}_2}{dy} \right) \\ v_1 = \frac{ig'}{f} \left(\kappa \bar{\phi}_1 + \frac{\omega}{f} \frac{d\bar{\phi}_1}{dy} \right) \\ v_3 = \frac{ig'}{f} \left(\kappa \bar{\phi}_3 + \frac{\sigma}{f} \frac{d\bar{\phi}_3}{dy} \right) \end{cases} \quad (5.1.21)$$

an. Setzt man (5.1.19) und (5.1.21) in Gl. (5.1.20) ein, so bekommt man die Gleichung

$$\Delta \frac{W_{p,o}(x_L)}{M_{p,o}(x_L)} \cdot \frac{M_{p,o}(x_0)}{W_{p,o}(x_0)} \cdot G(x_L) \cdot A_1 = 0 \quad (5.1.22)$$

wo $\epsilon = \frac{\kappa U}{f}$, $x = x_0 + 2\kappa L$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 + \frac{\epsilon}{x_0} \frac{\omega}{\sigma} - 2\epsilon \frac{\omega}{\sigma} \frac{W'_{p,o}(x_0)}{W_{p,o}(x_0)} \\ 1 + \epsilon q_2 \frac{\sigma}{\omega} & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 + \frac{\epsilon}{x_0} \frac{\omega}{\sigma} - 2\epsilon \frac{\omega}{\sigma} \frac{M'_{p,o}(x_0)}{M_{p,o}(x_0)} \\ 1 + \epsilon q_2 \frac{\sigma}{\omega} & 1 \end{vmatrix}$$

und

$$G(x_L) = \frac{P(x_L) - \Omega(x_L)}{1 - \Omega(x_L)}$$

$$P(x_L) = \frac{1 + \frac{\epsilon}{x_L} \frac{\omega}{\sigma} - 2\epsilon \frac{\omega}{\sigma} \frac{W'_{p,o}(x_L)}{W_{p,o}(x_L)}}{1 + \frac{\epsilon}{x_L} \frac{\omega}{\sigma} - 2\epsilon \frac{\omega}{\sigma} \frac{M'_{p,o}(x_L)}{M_{p,o}(x_L)}}$$

$$\Omega(x_L) = \frac{1}{1 + \epsilon q_3 \frac{\sigma}{\omega}} \frac{1}{1 + \frac{\epsilon}{x_L} \frac{\omega}{\sigma} - 2\epsilon \frac{\omega}{\sigma} \frac{M'_{p,o}(x_L)}{M_{p,o}(x_L)}}$$

ist. Wenn $x_L \gg 1$ wird, ergibt sich aus der asymptotische Entwicklung

$$\frac{W_{p,o}(x_L)}{M_{p,o}(x_L)} \sim e^{-2\kappa L} (2\kappa L)^{2p}$$

Falls $L \rightarrow \infty$ wird, so geht Gl. (5.1.22) über in Gl. (5.1.10). Da x_0 durch die Tiefe D_2 bestimmt wird, ist $x_0 \ll 1$ so bleibt auch

$$\frac{M_{p,o}(x_0)}{W_{p,o}(x_0)} \ll 1$$

Daraus können wir annehmen, daß die Störungsbreite keine große Einwirkung hat, wenn $\kappa L \gg 1$ wird.

Wird in Gl. (5.1.22) $x_0 \rightarrow \infty$, $x_L \rightarrow \infty$, so muß sie mit der Gleichung in barotropisch quellfreier Bewegung übereinstimmen. Also ergibt sich dabei durch asymptotische Entwicklung

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{W_{p,o}(x_L)}{M_{p,o}(x_L)} \sim \Gamma(\alpha) x_L^{2p} e^{-2\kappa L} \\ \frac{M_{p,o}(x_0)}{W_{p,o}(x_0)} \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x_0^{-2p} e^{2\kappa x_0} \end{array} \right.$$

und überdies

$$P(x_L) \doteq \frac{1 + \epsilon \frac{\omega}{\sigma}}{1 - \epsilon \frac{\omega}{\sigma}}$$

$$\Omega(x_L) \doteq \frac{1}{1 - \epsilon \frac{\sigma}{\omega}} \frac{1}{1 - \epsilon \frac{\omega}{\sigma}}$$

so ergibt sich

$$G(x_L) \doteq \frac{\frac{\sigma}{\omega} - \frac{\omega}{\sigma}}{\frac{\sigma}{\omega} + \frac{\omega}{\sigma}}$$

$$A \doteq -\epsilon \left(\frac{\omega}{\sigma} + \frac{\sigma}{\omega} \right)$$

$$A_1 \doteq \epsilon \left(\frac{\omega}{\sigma} - \frac{\sigma}{\omega} \right)$$

Somit nimmt Gl. (5.1.22) die Form

$$-\left(\frac{\omega}{\sigma} + \frac{\sigma}{\omega} \right) + \frac{\frac{\omega}{\sigma} - \frac{\sigma}{\omega}}{\frac{\omega}{\sigma} + \frac{\sigma}{\omega}} e^{-2\epsilon L} \left(\frac{\omega}{\sigma} - \frac{\sigma}{\omega} \right) = 0$$

an. Weil $\frac{\sigma}{\omega} = \frac{p}{p-1}$, $p = \frac{c}{U}$ ist, haben wir schließlich

$$\left[1 + \left(\frac{p}{p-1} \right)^2 \right]^2 - \left[1 - \left(\frac{p}{p-1} \right)^2 \right]^2 e^{-2\epsilon L} = 0$$

Das ist nicht anders als Gl. (3.10), welche in der barotropisch quellfreien Bewegung entsteht.

(ii) Wenn die Geschwindigkeit der Grundströmung klein ist, können wir in folgender Gleichung

$$\frac{d^2 \bar{\phi}_1}{dy^2} - \frac{fU}{g' D_1} \frac{d \bar{\phi}_1}{dy} - \left(\kappa^2 + \frac{f^2}{g' D_1} \frac{\sigma}{\omega} \right) \bar{\phi}_1 = 0$$

$D_1 = \text{const.}$ annehmen, welche aus Gl. (5.1.1) ausgeleitet wird. Dann ergibt sich die Lösung

$$\bar{\phi}_1 = A_1 e^{\epsilon_1 y} + B_1 e^{-\epsilon_2 y} \quad (5.2.2)$$

wo

$$\epsilon_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\frac{F_1}{\epsilon} \right) \left[1 \pm \sqrt{1 + 4 \left(\frac{\epsilon}{F_1} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{r_1} \frac{\sigma}{\omega} \right)} \right]$$

$$F_1 = \frac{U^2}{g' D_1} \quad ; \quad \epsilon = \frac{\kappa U}{f} \quad ; \quad r_1 = \frac{g' D_1}{f^2} \kappa^2$$

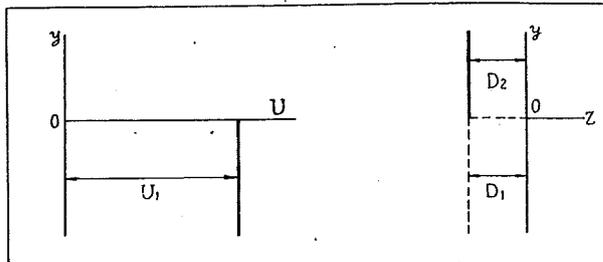


Abb. 14 Modell der Geschwindigkeitsverteilung im zweischichtigen Meer, falls $D = \text{const.}$ angesehen wird

ist. Das Modell ist gezeichnet im Abb. 15. In dem Fall bekommen wir statt Gl. (5.1.22) folgende charakteristische Gleichung

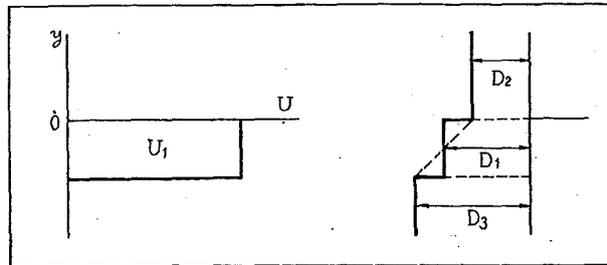


Abb. 15 Dasselbe Modell mit der begrenzten Strömungsbreite

$$A - e^{-2axL} Q A_1 = 0 \tag{5.2.3}$$

wo

$$\begin{cases} a = \left(\frac{F_1}{\epsilon} \right) \sqrt{1 + 4 \left(\frac{\epsilon}{F_1} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{r_1} \frac{\sigma}{\omega} \right)} \\ Q = \frac{1 + \frac{\omega}{\sigma} \epsilon \xi_1 - \frac{1}{1 - \epsilon q_3 \frac{\sigma}{\omega}}}{1 + \frac{\omega}{\sigma} \epsilon \xi_2 - \frac{1}{1 - \epsilon q_3 \frac{\sigma}{\omega}}} \end{cases}$$

und

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 + \epsilon \xi_1 \frac{\omega}{\sigma} \\ 1 + \epsilon q_2 \frac{\sigma}{\omega} & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 + \epsilon \xi_2 \frac{\omega}{\sigma} \\ 1 + \epsilon q_2 \frac{\sigma}{\omega} & 1 \end{vmatrix}$$

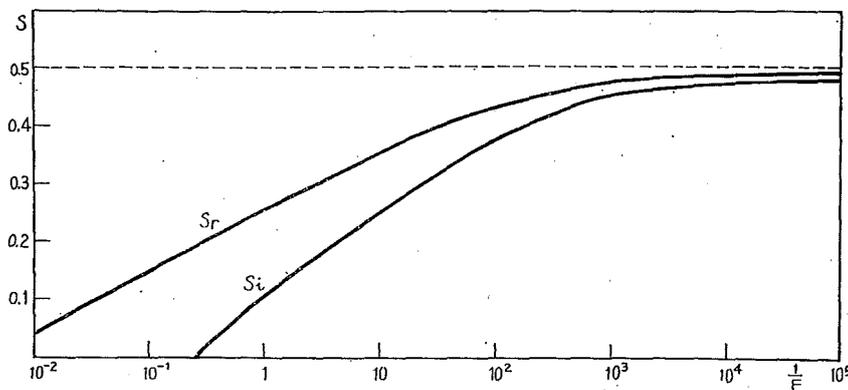


Abb. 16 Phasengeschwindigkeit und Instabilität beim Modell in Abb. 14 ($\epsilon = 0.1$)

ist. Daraus sehen wir auch, daß die Wirkung der Grundströmungsbreite desto kleiner wird, je größer sich L ausbreitet. Da $F \sim 1$, $\epsilon \sim 10^{-1}$, $r_1 \sim 10^{-2}$, $\left| \frac{\sigma}{\omega} \right| \sim 1$ ist, wird $\Re(a) > 1$ und die Verkleinerung ist schneller als der Fall der barotropisch quellfreien Bewegungen, in der $a=1$ ist.

Wenn $L \rightarrow \infty$ wird, nimmt Gl. (5.2.3) die Form

$$z^4 - \left(\epsilon^2 + \frac{\epsilon}{r_2 q_2} \right) z^2 + \frac{1}{q_2} \left(\frac{1}{r_2 q_2} + 2\epsilon \right) z - \frac{1}{q_2^2} = 0$$

$$z = \frac{c}{U - c} \quad (5.2.4)$$

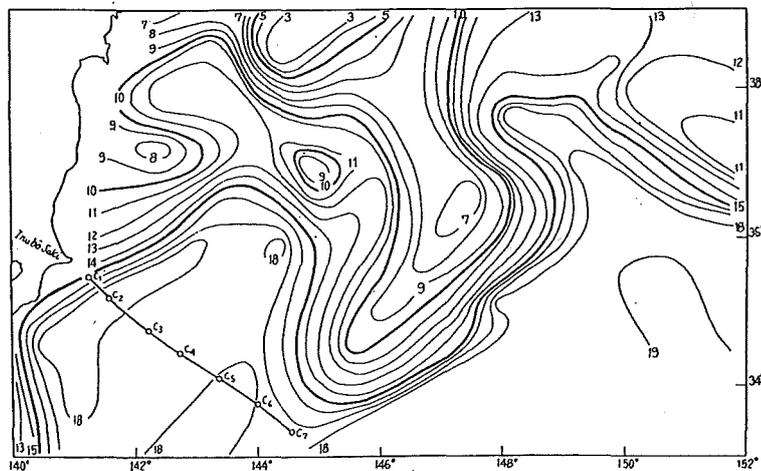


Abb. 17 (a)

Abb. 17(a) Horizontale Verteilung der Temperatur ($^{\circ}\text{C}$) an der 200 m Tiefe bei der Delta-störung (Nov. 1958)

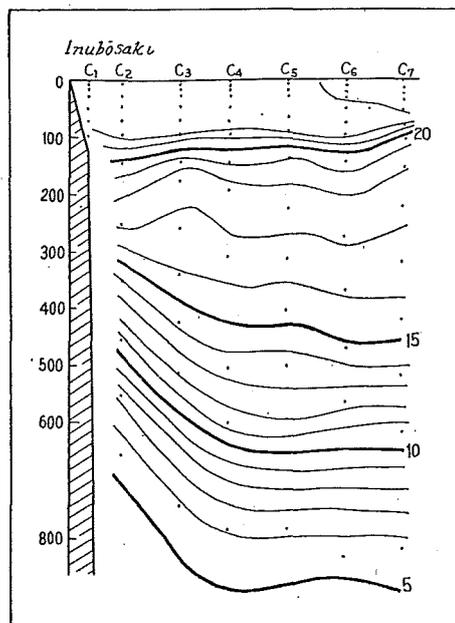


Abb. 17 (b)

Abb. 17(b) Vertikale Verteilung der Temperatur ($^{\circ}\text{C}$) auf der Linie in Abb. 17(a).

an. Die Gleichung ist gültig als die Näherungsform von Gl. (5.1.10), wenn U klein bleibt.

Rechnet man daraus z und dazu gehörige $s_r (= \frac{c_r}{U})$, $s_i (= \frac{c_i}{U})$ so bekommt man Abb. 16. Wie oben erwähnt wird hat die Phasengeschwindigkeit und Instabilität der Störungsbewegung ähnlichen Charakter wie Gl. (5.1.10). Also sowohl sich s_r als auch s_i je mehr verkleinern, wenn sich F je mehr vergrößert.

An Abb. 17 und Abb. 18 haben wir die Schlangenwindung des *Kuroshio* durch die Isothermen an der 200 m Tiefe und auch den vertikalen Schnitt der Temperaturverteilung gezeigt. Jene zeigt deutlich die Ausbildung der

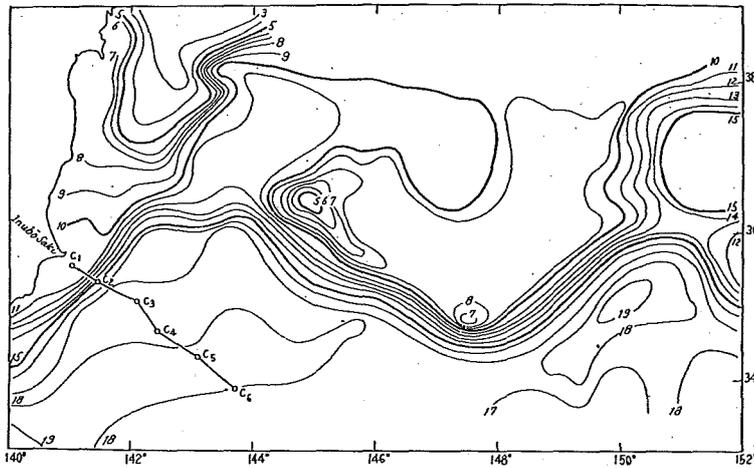


Abb. 18 (a)

Abb. 18(a) Horizontale Verteilung der Temperatur (°C) an der 200 m Tiefe bei der schwachen Schlangenwindung

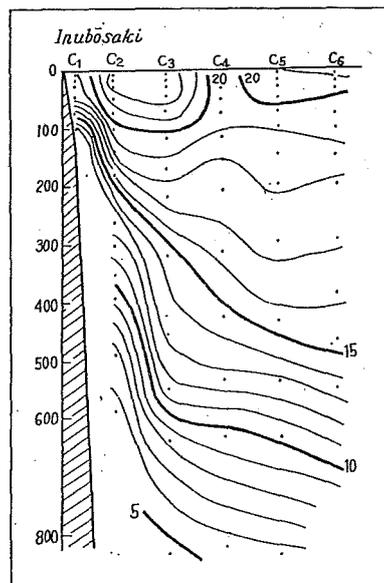


Abb. 18 (b)

Abb. 18(b) Vertikale Verteilung der Temperatur (°C) auf Linie in Abb. 18(a)

sog. "Delta-störung", dagegen ist sie in dieser nicht zu sehen, wenigstens ist die Schlangenwindung schwächer als im andern. Die Temperaturverteilung im vertikalen Schnitt in Abb. 18 zeigt kleinere Tiefe der Isothermen 10°C an der linken Seite als in Abb. 17. Zwar das Maximum der Grundgeschwindigkeit in Abb. 18 größer (etwa 3.5 kt) als in Abb. 17 (etwa 2.5 kt) ist, sieht es sehr wahrscheinlich aus, daß die potentielle Vorticity in Abb. 17 schärferes Maximum als in Abb. 18 hat. Somit können wir erwarten, daß sich die Schlangenwindung in Abb. 17 leicht entwickeln kann. Abb. 19 zeigt statistische Beziehung zwischen der Amplitude der Schlangenwindung (A) und der oberen Schichtdicke (bis 10°C) an der nordlichen Seite der Grundströmung (D) auf der Beobachtungslinie senkrecht zur Küstenlinie an *Katsuura* (Nähe von *Inubosaki*). Daraus sehen wir, daß sich die Schlangenwindung desto leichter entwickelt, je mehr D größer wird. Doch brauchen wir in Zukunft die Ausführung der genauen Seemessungen quer über die Meeresströmung, damit wir klar sehen, in welchem Grade die Variation der potentiellen Vorticity auf die Entwicklung der Störungsbewegungen einwirkt.

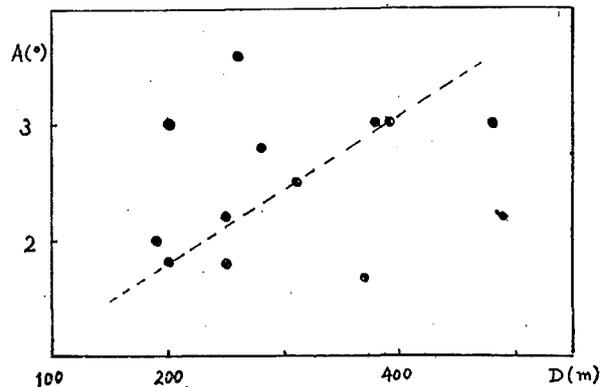


Abb. 19 Statistische Beziehung zwischen der Amplitude der Schlangenwindung (A) und der oberen Schichtdicke an der nordlichen Seite.

6. Effekt des Abstandes der Grundströmung vom festen Lande.

Wie in Abb. 20 gezeichnet ist, stellen wir uns vor, daß die Grundströmung mit dem Abstand λ von der Küstenlinie läuft. Vorausgesetzt, daß die Grundströmung nach Süden unendlich ausgedehnt ist. Da die Normalkomponente der Störungsgeschwindigkeit an der Küste verschwinden muß, bekommt man in ähnlicher Weise wie oben die charakteristische Gleichung folgendermaßen

$$\frac{z}{z - \epsilon \tilde{\xi}_1} = \frac{[1 + (1 + \epsilon q_2)z](1 - e^{-2 * q_2 \lambda}) - (1 - Q)z}{1 - Q} \quad (6.1)$$

wo

$$Q = \frac{1 + (1 - \epsilon q_2)z}{1 + (1 + \epsilon q_2)z} e^{-2 \cdot q_2 \cdot \lambda} \quad q_2 = \sqrt{1 + \frac{1}{r_2}}$$

ist. Andere Zeichen sind dieselbe wie §. 5. Wenn $\lambda \rightarrow \infty$ wird, nimmt Gl. (6.1) die Form der Gl. (5.2.4) an. Daraus sehen wir, daß sich die Einwirkung des Abstandes von dem Lande verkleinert schneller als im Fall der barotropisch quellfreien Bewegungen, in denen sich die Gleichung ergibt

$$(z^2 + 1) + (z^2 - 1) e^{-2 \cdot \lambda} = 0 \tag{6.2}$$

Da r_2/κ^2 der Deformationsradius von Rosby ist, zeigt Gl. (6.1) schnelleres Abklingen der Einwirkung des Abstandes als im barotropischen Fall, je mehr sich dieses Radius vermindert.

Zum Beispiel nehmen wir $D \sim 10^4 \text{cm}$, $k \sim 10^{-7} \text{cm}^{-1}$, dann wird $q_2 \sim 10$. Also wird die Einwirkung des Abstandes zehntel vom Fall des homogenen unendlich tiefen Meer.

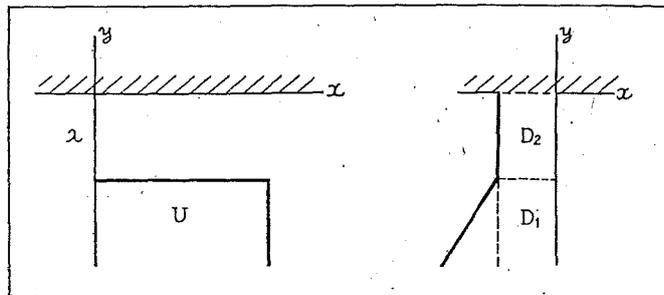


Abb. 20 Modell der Grundströmung im zweischichtigen Meer, welche von der Küste um λ entfernt läuft

II. Instabilitätscharakter der Meeresströmung im geschichteten Meer falls die Tiefe endlich begrenzt bleibt.

7. Grundgleichung.

Im Kapitel I haben wir vorausgesetzt, daß die Meerestiefe unendlich tief ist, damit die Bewegung nur in der oberen Schichte vorhanden sei. Wie in §.1 erwähnt wird, ist die Schwankung der Meeresströmung natürlich von der Bodengestalt beeinflusst. So ist es wichtig, die Einwirkung der zusätzlichen Störung in der unteren Schichte zu schätzen. Nun betrachten wir der Einfachheit halber nur den Fall, wo die Meeresboden glatt ist.

Die Bewegungsgleichungen in der oberen Schichte ergeben sich

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) u_1 - f' v_1 &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) v_1 + f u_1 &= -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned} \right\} \tag{7.1}$$

und die Kontinuitätsgleichung lautet

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi + \frac{\partial}{\partial x} (D_1 u_1) + \frac{\partial}{\partial y} (D_1 v_1) = 0$$

Da es in der unteren Schichte keine Grundströmung gibt, bekommt man folgende Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial t} - f v_2 &= -g \frac{\partial}{\partial x} (\eta - b\phi) \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} + f u_2 &= -g \frac{\partial}{\partial y} (\eta - b\phi) \end{aligned} \right\}$$

dazu haben wir folgende Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} (\eta - \phi) + \frac{\partial}{\partial x} (D_2 u_2) + \frac{\partial}{\partial y} (D_2 v_2) = 0 \quad (7.4)$$

wo $\eta = \eta_1$, $\phi = \eta_1 - \eta_2$ und D_2 die Tiefe der unteren Schichte von der inneren Trennfläche ist. Wie in §. 2 bilden wir Wirbelgleichung aus und nach der quasigeostrophischen Annäherung bekommen wir in der oberen Schichte

$$\frac{d}{dy} \left(D_1 \frac{d\bar{\eta}}{dy} \right) - D_1 \left(\kappa^2 - \frac{\kappa f}{\omega} \frac{1}{D_1} \frac{dD_1}{dy} \right) \bar{\eta} = \frac{f^2}{g} \bar{\phi} \quad (7.5)$$

In der unteren Schichte bekommt man ebenfalls

$$\frac{d}{dy} \left[D_2 \frac{d}{dy} (\bar{\eta} - b\bar{\phi}) \right] - D_2 \left(\kappa^2 - \frac{\kappa f}{\sigma} \frac{1}{D_2} \frac{dD_2}{dy} \right) (\bar{\eta} - b\bar{\phi}) = \frac{f^2}{g} (\bar{\eta} - \bar{\phi}) \quad (7.6)$$

8. Einwirkung der Meerestiefe auf der Instabilität.

Der Einfachheit halber setzen wir voraus, daß U , D_1 , D_2 alle konstant sind und daß die Störung in y -Richtung konstant bleibt. In §.3 haben wir gezeigt, daß die Störungsbewegung unter obigen Voraussetzungen stabil bleibt. Wenn es aber in der unteren Schichte die Störungsbewegung gibt, kann sie intabil werden. Also nimmt Gl. (7.5) und Gl. (7.6) folgende Form

$$\left(\kappa^2 + \frac{\kappa U}{\omega} \frac{f^2}{g' D_1} \right) \bar{\eta} + \frac{f^2}{g D_1} \bar{\phi} = 0 \quad (8.1)$$

$$\left(\kappa^2 - a \frac{\kappa U}{\sigma} \frac{f^2}{g' D_2} \right) (\bar{\eta} - b\bar{\phi}) + \frac{f^2}{g D_2} (\bar{\eta} - \bar{\phi}) = 0 \quad (8.2)$$

an. Da wir im Meer $a=1$ annehmen kann, bekommen wir aus Gl. (8.1) und Gl. (8.2) folgende Beziehung

$$\left(r_2 + \frac{\omega}{\sigma} \right) \left(r_1 + \frac{\sigma}{\omega} \right) - 1 = 0 \quad (8.3)$$

wo

$$r_1 = \frac{g' D_1}{f^2} \kappa^2 \quad ; \quad r_2 = \frac{g' D_2}{f^2} \kappa^2$$

ist. Daraus ergibt sich

$$\sigma = \frac{1}{2} \frac{r_1(2+r_2) \pm \sqrt{\Delta}}{[(1+r_1)(1+r_2)-1]} \kappa U \quad (8.4)$$

$$\Delta = r_1 r_2 (r_1 r_2 - 4) \quad (8.5)$$

Somit bekommt man Indifferenzkurve $\Delta=0$. Wenn $\Delta < 0$ wird, wird die

zusätzliche Störung instabil. Wenn $D_2 \rightarrow \infty$ wird, so stimmt Gl. (8.4) mit Gl. (3.7) überein und wird die Bewegung stabil. Da aber $r_1 \sim 10^{-2}$, $r_2 \sim 1$ ist, wird die Störungsbewegung immer instabil, wenn man die Störung in der unteren Schichte in Betracht zieht. Es ist hier zu bemerken, daß die Indifferenzkurve von der Geschwindigkeit der Grundströmung unabhängig ist,

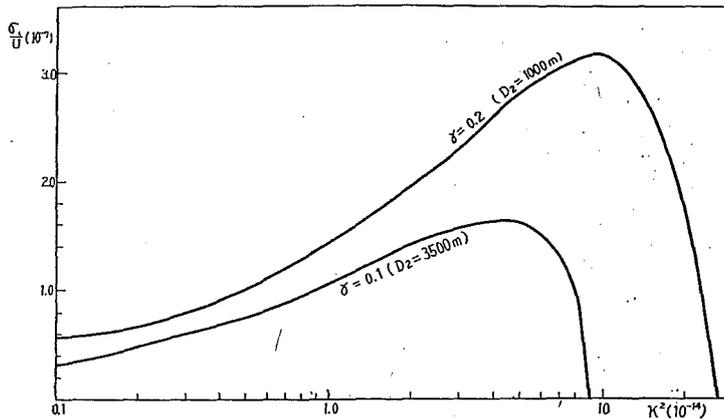


Abb. 21 Instabilitätskurve beim zweischichtigen Meer, wo die Tiefe begrenzt bleibt. (Ohne Querscherung) $r = \frac{D_1}{D_2}$

welche im §. 3 erwähnten Stommelschen Modell wichtige Rolle spielt. Abb. 21 zeigt ein Beispiel für die Instabilität σ_i/U . Daraus sehen wir, daß die Störungswelle von etwa 200~300 km Wellenlänge für $r=0.1$, $D_2=3500$ m eine Maximuminstabilität bekommt.

Wie wir im Bild sehen, wird die Instabilität desto größer, je kleiner D_2 wird. Das kann andeuten die Einwirkung der *Izu-shoto* und *Nansei-shoto* fürs Ercheinen der ausgedehnten Kaltwassermasse im *Kurosio*.

Letztens sehen wir, in welchem Verhältnis diese Indifferenzkurve steht mit Stommelschen Modell. Unter denselben Voraussetzungen für die Grundströmung und die zusätzlichen Störung haben wir aus Gl. (7.1)~Gl. (7.4) folgende charakteristische Gleichung ohne quasigeostrophische Annäherung für Störung

$$(1+r)p^4 - (3+r)p^3 - \left[\frac{1}{F} + \frac{1+r}{\epsilon^2} - 3\left(1 + \frac{r}{r_1}\right) \right] p^2 - \left[1 + 3\frac{r}{r_1} - \frac{1}{F} - \frac{2r}{\epsilon^2} \right] p - \frac{r}{\epsilon^2}(1-F) = 0 \quad (8.6)$$

Dabei ist

$$p = \frac{c}{U} ; F = \frac{U^2}{g'D_1} ; \epsilon = \frac{\kappa U}{f} ; r_1 = \frac{g'D_1}{f^2} \kappa^2 ; r = \frac{D_1}{D_2}$$

Um die Kompliziertheit zu vermeiden, setzen wir voraus $D_1=D_2$, weil es sich hier einfach um die Form der Indifferenzkurve handelt. Dann nimmt Gl. (8.6) die Form

$$p^4 - 2p^3 - \frac{h_1}{2}p^2 + \frac{h_2}{2}p - \frac{1}{2\epsilon^2}(1-F) = 0 \quad (8.7)$$

an. Hier ist

$$\begin{cases} h_1 = \frac{1}{F} + \frac{2}{\epsilon^2} - 3\left(1 + \frac{1}{r_1}\right) \\ h_2 = h_1 + 2 \end{cases}$$

Setzt man $p = y + 1/2$, so bekommt man folgende Gleichung

$$y^4 + qy^2 + r = 0 \quad (8.8)$$

wo

$$\begin{cases} q = \frac{h_2 - 1}{2} \\ r = \frac{1}{16} - \frac{h_2}{8} - \frac{1}{2\epsilon^2}(1-F) \end{cases}$$

ist. Um die Störungsbewegung stabil bleiben zu lassen, muß man folgende Bedingungen haben

$$q < 0, \quad q^2 - 4r > 0, \quad r \geq 0$$

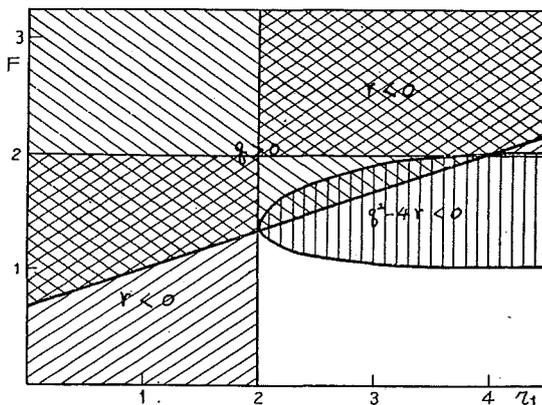


Abb. 22 Indifferenzkurve bei der baroklinisch-scherungslosen Strömung, falls die Tiefe begrenzt bleibt ($D_1 = D_2$)

Aus Gl. (8.5) haben wir Indifferenzkurve in der quasigeostrophischen Annäherung als $r_1 = 2$. Unter der Bedingung dieser Annäherung

$$Fr = \left(\frac{\kappa U}{f}\right)^2 \ll 1$$

bekommt man nicht das Gebiet, worin $q > 0$ für $r_1 > 2$ ist.

Übersicht und Schlußwort.

Auf Grund von den Seemessungen haben wir Modell der Meeresströmung im geschichteten Meer ausgebildet. Also ist das erste das zweischichtige, unendlich tiefe Meer, in welchem sich die Bewegung nur in der oberen Schichte ergibt und im zweiten ist die Meerestiefe begrenzt, damit sich die

Abb. 22 zeigt die Indifferenzkurve bei unserem Modell. Wenn $D_2 \rightarrow \infty$ wird, stimmt Gl. (8.6) mit der Stömmelschen Gleichung (3.1) überein und ihr Instabilitätsgebiet entspricht in unserem Fall dem Gebiet $q - 4r < 0$, wo $F > 1$ bleiben muß. Dies Gebiet zeigt die Einwirkung der Schichtenstruktur und der Advektion. Darauf kommt noch die Instabilität durch die Einwirkung der vertikalen Scherung der Grundgeschwindigkeit.

Störungsbewegung auch in der unteren Schichte ergibt, wenn auch es hier keine Grundströmung gibt.

Weil es sich hier um die langsamen Störungsbewegungen in der als geostrophisch angesehenen Grundströmung handelt, haben wir nur diejenige Störungsbewegung ausgesondert, deren Frequenzen kleiner als planetarischen Vorticity sind.

Unter dieser Maßregelung haben wir gezeigt, daß die potentielle Vorticity quer über die Grundströmung an irgendeiner Stelle Extrema nehmen soll, auf daß die zusätzliche Störungswelle instabil werde. Dies entspricht in der barotropisch quellfreien Bewegung dem Ergebnis, daß die absolute Vorticity an irgendeiner Stelle quer über die Grundströmung Extrema annimmt und ist die Kehrseite dessen, daß die aus angehäuften Seemessungen gerechnete potentielle Vorticity überall im Meer ungefähr konstant bleibt. Dies zeigt deutlich die Einwirkung der Querschering der Grundströmung und der Schichtenstruktur des Meeres auf die Instabilität der zusätzlichen Störungen. Aber wir brauchen noch sorgfältige Seemessungen, um die Folgerung festzustellen.

Dazu haben wir die Instabilität im einfachen Modell gerechnet und die Einwirkung der Grundströmungsbreite geschätzt. Durch die numerische Rechnung haben wir die den einigen Seemessungen passende Instabilität bekommen, welche weder aus barotropisch quellfreien noch baroklinisch scherungslosen Modellen zu bekommen sind. Dabei ist zu sehen, daß die Einwirkung sowohl der Grundströmungsbreite als auch des Abstandes von der Küste kleiner wird als im Falle der barotropisch quellfreien Bewegung, weil hier das Deformationsradius große Rolle spielt.

Wenn wir dagegen die Störungsbewegung in der unteren Schichte in Betracht zieht, wird sie instabil wegen der Vertikalscherung der Grundströmung, welche im ersten Modell ausgefallen ist. Da die in dieser Weise gerechnete Instabilität auch passenden Wert annimmt, soll die Zusammenhänge der Einwirkung beider Scherungen in Zukunft erklärt werden.

Schrifttum

- Fuglister, F. C., Worthington, L. V.: 1951 *Tellus* 3(1)
Fukuoka, J.: 1958 *Jour. Ocean. Japan* 14(1)
Haurwitz, B. & Panofsky, H. A.: 1950 *Trans. Amer. Geophys. Un.* 31(5)
Hydrographic Office of Japan: 1955-1959 *Ocean. Rep.*
Koizumi, M.: 1956 *Pap. Met. Geophys.* 7(2)
Kajiura, K.: 1953 *Jour. Ocean. Soc. Japan* 9(1)
Kuo, H.-L.: 1949 *Jour. Met.* 6(1)
Lin, C. C.: 1945 *Quart. Appl. Math.* 3(2, 3, 4): 1955 *Hydrodynamic Stability*
Masuzawa, J.: 1956 *Ocean. Mag.* 7(2), 9(1): 1958 1061)
Met. Agency Japan: 1958 *Ocean. Rep.* 6(4)

Nannichi, T.: Ocean. Mag. 1957 9(1): 1958 10(2): Pap. Met. Geophys.
1958 8(4), 1959 10(1)

Queney, P.: Bull. Amer. Math. Soc. 29(1)

Rayleigh, L.: 1880 Sci. Pap. 1

Sommerfeld, A.: 1908 Proc. 4th Int. Congr. Math. Rome

Stommel, H.: 1953 Porn. Res. 12(2): 1958 The Gulfstream

Tollmien, W.: 1935 Göttinger Nachr. Math.-Phys. Kl. 1(1)