

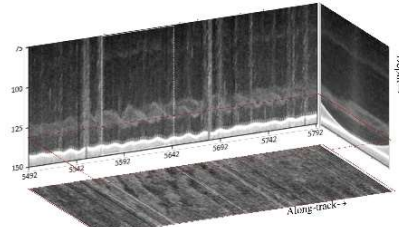
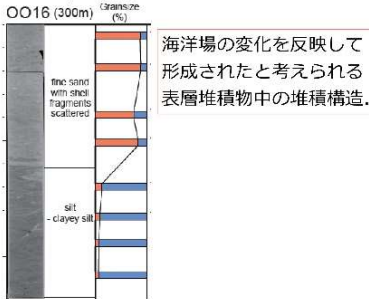
P3 海洋内部の流体運動を模した直接数値計算法まとめ -密度成層系における鉛直シア一流を例に-



堀之内龍一*1 (*1 海洋情報部大洋調査課)

概要

海水中の流速及び密度構造は、当庁が実施してきた下記に挙げられるような研究と密接な関係を有し、その考察は重要である。本発表では、海水中の流体運動の考察に用いられる数値シミュレーションについて、密度成層系における鉛直シア一流の二次元直接数値計算を例に、その手法を紹介する。



(長澤・堀之内, 2023; JpGU)
マルチビーム音響測深機のウォーターカラムデータ内に可視化された、海水密度場の不連続面を反映していると考えられる音響異常。

(齋藤・青木, 2023; 地質学会)

基礎方程式系

Smyth(1999)を参考に、非粘性かつ Boussinesq 近似を適用し無次元化した鉛直二次元の方方程式系を基礎方程式とする;

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{Re_0} \nabla^2 \mathbf{v} + Ri_0 \theta \mathbf{e}_z - \nabla p,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \theta = \frac{1}{Re_0 \cdot Pr} \nabla^2 \theta.$$

ただし,

$$u^* = U_0^* u, \quad w^* = U_0^* w, \quad x^* = H_0^* x, \quad z^* = H_0^* z,$$

$$t^* = \frac{H_0^*}{U_0^*} t, \quad p^* = \rho^* U_0^{*2} p, \quad \theta = -\frac{\rho^* - \rho_0^*}{\rho_0^*} = -\frac{\Delta \rho}{\rho_0},$$

$$Re_0 = \frac{U_0 H_0}{\nu}, \quad Ri_0 = \frac{g \theta_0 H_0}{U_0^2}, \quad Pr = \frac{\nu}{\kappa}.$$

初期条件及び境界条件

【初期条件】: 平均場として tanh 関数

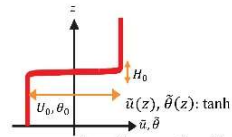
$$u = \bar{u} + a \tilde{u}, \quad w = a \tilde{w}, \quad (a = 0.05)$$

$$\theta = \bar{\theta} + a \tilde{\theta}.$$

$$\bar{u} = \frac{U_0}{2} \tanh \frac{2(z - \frac{H}{2})}{H_0}, \quad \bar{u} = \frac{U_0}{2} \frac{1}{k_0} \left(-\cos \frac{2k_0 x}{H_0} + 2b \cos \frac{k_0 x}{H_0} \right) \tanh \frac{2(z - \frac{H}{2})}{H_0} \operatorname{sech} \frac{2(z - \frac{H}{2})}{H_0},$$

$$\bar{\theta} = \frac{\theta_0}{2} \tanh \frac{2(z - \frac{H}{2})}{H_0}, \quad \bar{\theta} = \frac{\theta_0}{2} \frac{1}{k_0} r_0(x, z) \operatorname{sech}^2 \frac{2(z - \frac{H}{2})}{H_0},$$

$$\tilde{w} = \frac{U_0}{20} \frac{z}{z_0} \sin k_0 x.$$



【境界条件】

・側方: 周期境界

・上下:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} - \rho_0 g \theta = 0.$$

数値計算法

- ・空間差分: 三次精度風上差分法 (UTOPIA 法. 非線形項のみ) 二次精度中心差分法
- ・時間差分: Euler 法
- ・Fractional step法:
 - ① 圧力傾度力を除いた運動方程式について仮の流速を求める
 - ② 非圧縮性の連続の式を利用し、圧力に関する Poisson 方程式を解く
 - ③ 次のステップの流速を求める

一般座標系への変換

下記のように物理面 (x, z) を計算面 (ξ, η) に変換する;

$$x = \Delta x \xi, \quad z = \Delta z \eta + A \sin \frac{2\pi \eta}{\eta_{max}}, \quad (A = \text{Const})$$

下付き文字で偏微分を表すと,

$$x_{\xi} = \Delta x, \quad x_{\eta} = 0, \quad z_{\eta} = S + \frac{A}{\eta_{max}} \cos \frac{2\pi \eta}{\eta_{max}},$$

$$x_{\xi\xi} = x_{\eta\eta} = x_{\xi\eta} = z_{\xi\xi} = z_{\eta\xi} = 0,$$

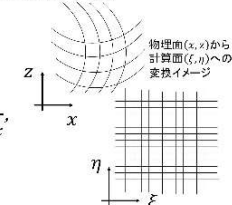
$$z_{\eta\eta} = -\frac{A}{\eta_{max}^2} \sin \frac{2\pi \eta}{\eta_{max}}$$

任意の関数 f について、物理面の偏微分を計算面の偏微分で表すと,

$$f_x = \frac{z_{\eta} f_{\xi} - z_{\xi} f_{\eta}}{J}, \quad f_z = \frac{-x_{\eta} f_{\xi} + x_{\xi} f_{\eta}}{J},$$

$$\nabla^2 f = \frac{\alpha f_{\xi\xi} - 2\beta f_{\xi\eta} + \gamma f_{\eta\eta}}{J^2} + \frac{(\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta})(z_{\xi} f_{\eta} - z_{\eta} f_{\xi})}{J^3} + \frac{(\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta z_{\xi\eta} + \gamma z_{\eta\eta})(x_{\eta} f_{\xi} - x_{\xi} f_{\eta})}{J^3},$$

$$(J = x_{\xi} z_{\eta} - x_{\eta} z_{\xi}, \alpha = x_{\eta}^2 + z_{\eta}^2, \beta = x_{\xi} x_{\eta} + z_{\xi} z_{\eta}, \gamma = x_{\xi}^2 + z_{\xi}^2)$$



よって, Fractional step 法に基づき分解した方程式系は,

$$u^{(F)} = u^{(n)} + \left[-u \frac{u_{\xi}}{x_{\xi}} - w \frac{u_{\eta}}{z_{\eta}} + \frac{1}{Re_0} \left(\frac{1}{x_{\xi}^2} u_{\xi\xi} + \frac{1}{z_{\eta}^2} u_{\eta\eta} - \frac{z_{\eta\eta}}{x_{\xi}^2} u_{\eta} \right) \right] \Delta t,$$

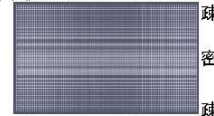
$$w^{(F)} = w^{(n)} + \left[-u \frac{w_{\xi}}{x_{\xi}} - w \frac{w_{\eta}}{z_{\eta}} + \frac{1}{Re_0} \left(\frac{1}{x_{\xi}^2} w_{\xi\xi} + \frac{1}{z_{\eta}^2} w_{\eta\eta} - \frac{z_{\eta\eta}}{z_{\eta}^2} w_{\eta} \right) + Ri_0 \theta \right] \Delta t,$$

$$u^{(n+1)} = u^{(F)} - \frac{p_{\xi}}{x_{\xi}} \Delta t,$$

$$w^{(n+1)} = w^{(F)} - \frac{p_{\eta}}{z_{\eta}} \Delta t,$$

$$\theta^{(n+1)} = \theta^{(n)} + \left[-u \frac{\theta_{\xi}}{x_{\xi}} - w \frac{\theta_{\eta}}{z_{\eta}} + \frac{1}{Pr Re_0} \left(\frac{1}{x_{\xi}^2} \theta_{\xi\xi} + \frac{1}{z_{\eta}^2} \theta_{\eta\eta} - \frac{z_{\eta\eta}}{z_{\eta}^2} \theta_{\eta} \right) \right] \Delta t,$$

$$p = \frac{1}{2} \frac{1}{x_{\xi}^2 + z_{\eta}^2} \left[-\frac{\nabla_{\xi\eta} w^{(F)}}{\Delta t} + \frac{1}{x_{\xi}^2} (p_{(i+1,j)} + p_{(i-1,j)}) + \frac{1}{z_{\eta}^2} (p_{(i,j+1)} + p_{(i,j-1)}) - \frac{z_{\eta\eta}}{2z_{\eta}^3} (p_{(i,j+1)} + p_{(i,j-1)}) \right].$$



(下付き文字は偏微分, 括弧付き下付き文字は計算面格子, 括弧付き上付き文字はステップ数, F は Fractional step を示す)

計算結果例

上側の海水密度が重い場合:
Rayleigh-Taylor 不安定

$$U_0 = 0.01[\text{m/s}], H_0 = 0.01[\text{m}],$$

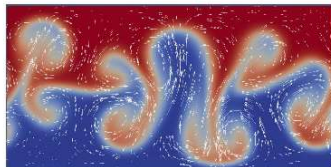
$$H = 0.5[\text{m}], L = 1[\text{m}],$$

$$\rho_0 = 1027[\text{kg/m}^3],$$

$$\Delta \rho = 10[\text{kg/m}^3],$$

$$\nu = 1 \times 10^{-4}[\text{m}^2/\text{s}], \kappa = 1 \times 10^{-4}[\text{m}^2/\text{s}],$$

$$Re_0 = 1, Ri_0 = 9.5, Pr = 1.$$



鉛直シアーが強い場合:
Kelvin-Helmholtz 不安定

$$U_0 = 1.5[\text{m/s}], H_0 = 0.01[\text{m}],$$

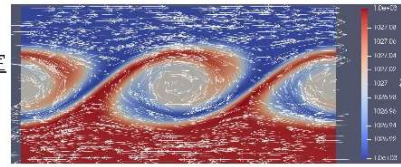
$$H = 0.5[\text{m}], L = 1[\text{m}],$$

$$\rho_0 = 1027[\text{kg/m}^3],$$

$$\Delta \rho = -0.2[\text{kg/m}^3],$$

$$\nu = 1 \times 10^{-4}[\text{m}^2/\text{s}], \kappa = 1 \times 10^{-4}[\text{m}^2/\text{s}],$$

$$Re_0 = 1.5 \times 10^2, Ri_0 = 8.5 \times 10^{-6}, Pr = 1.$$



まとめ

- ・今回は海洋内部の流体運動を想定した直接数値計算手法について、密度成層系におけるシア一流を例に、取りまとめて報告した
- ・ここで報告した手法はこれまでの観測結果(堀之内ほか, 2023; JpGU 等)を考察する上でも有効であると考えられ、多様な条件下での数値計算を実施して、海洋物理学的考察に活用していく

変数

$\mathbf{v} = u\mathbf{e}_x + w\mathbf{e}_z$: 流速ベクトル,
 t : 時間,
 ρ : 海水密度,
 ρ_0 : 平均海水密度,
 p : 圧力,
 θ : 重力加速度,
 κ : 海水密度拡散係数,
 θ : 無次元化海水密度擾乱,
 $\Delta \rho$: 初期海水密度擾乱,

θ_0 : 初期無次元化海水密度擾乱,
 U_0 : 初期水平方向流速,
 H_0 : 初期鉛直層厚,
 H : 領域高さ,
 L : 領域長さ,
 ν : 粘性係数,
 k_0 : 初期水平方向波数,
 $r_0(x, z)$: -1 から 1 の範囲の乱数,
 Re_0 : 初期レイノルズ数,
 Ri_0 : 初期リチャードソン数,
 Pr : プラントル数.

参考文献

- ・ Chen et al. (2021) Front. Phys.
- ・ 堀之内ほか (2023) JpGU
- ・ 長澤・堀之内 (2023) JpGU
- ・ 齋藤・青木 (2023) 地質学会
- ・ Smyth (1999) J. Fluid Mech.
- ・ 高見 (1994) 東京大学出版会
- ・ 牛島 (2011) 森北出版