最小自乗法による潮汐調和分解とその精度について

彦 坂 繁 雄・赤 木 登・矢 野 雄 幸

Note on the Harmonic Analysis of Tides by means of Least Squares Method and the Accuracies of Tidal Harmonic Constants.

Shigeo Hikosaka, Noboru Akagi and Yūkō Yano
Received January 10, 1966

Abstract

The harmonic analysis of tides by means of least squares method from 719 hourly heights of sea level is studied and the accuracies of the 13 tidal harmonic constants are estimated. This method may be available even if some observations are missing.

1 まえがき

潮汐の調和分解には，昔から Darwin の方法，TI 法など，いろいろの方法が用いられている．しかしこれらはいずれも机上での計算に便利のように工夫されたものである．しかし近年電子計算機が潮汐の調和分解にも用いられるようになり，2, 3 の方法が発表されている．ここで述べるのは，最小自乗法を利用したもので約1か月の毎時の観測値を用いて調和常数を算出し，それらの常数の精度を見積もってみたものである．(1) またこの方法によれば，観測の途中に欠測があっても調和分解を行なうことが可能であろう．

2 最小自乗法の潮汐調和分解への応用

いま計算の便利なように，$(2n+1)$ 個の毎時の観測値を用いることとする．毎時の潮高を $H(i)$ で表わすと

$$H(i)=a_0+a_1\cos i\sigma_1+a_2\cos i\sigma_2+\cdots\cdots+a_s\cos i\sigma_s+b_1\sin i\sigma_1+b_2\sin i\sigma_2+\cdots\cdots+b_s\sin i\sigma_s \qquad (1)$$

とおける．a_0 は平均水面，σ_1, σ_2, ……, σ_s は各分潮の速度，a_1, b_1, a_2, b_2, ……, a_s, b_s は求めるべき分潮の常数で，各分潮の振幅を R, 遅角を K とすると

$$\begin{cases} a=R\cos K \\ b=R\sin K \end{cases} \qquad (2)$$

である．いま観測値の中央時を $i=0$ にとって，毎時の潮高 $H(i)$ に $\cos i\sigma_m$, $\sin i\sigma_m$ を乗じて，$i=-n$ から $i=n$ まで加え合わすと

$$\sum_{i=-n}^{n} H(i)\cos i\sigma_m=a_0(\alpha_{0,m}+\alpha_{0',m})+a_1(\alpha_{1,m}+\alpha_{1',m})+\cdots\cdots+a_m(\alpha_{m,m}+\alpha_{m',m})+\cdots\cdots+a_s(\alpha_{s,m}+\alpha_{s',m}) \qquad (3)$$

$$\sum_{i=-n}^{n} H(i)\sin i\sigma_m=b_1(\alpha_{1,m}-\alpha_{1',m})+b_2(\alpha_{2,m}-\alpha_{2',m})+\cdots\cdots+b_m(\alpha_{m,m}-\alpha_{m',m})+\cdots\cdots+b_s(\alpha_{s,m}-\alpha_{s',m}) \qquad (4)$$

なる式が得られる．ここに

---

(1) この小論文は昭和 39 年度日本海洋学会秋季大会で発表されたものであるが，W. Horn (1960) が約1年 (8,857 個) の毎時の観測値を用いて，2 で述べる第1表と同様な表を 64 分潮に対して与えてあることを知った．

$$\alpha_{s,m}=\frac{\sin(2n+1)\left(\dfrac{\sigma_s-\sigma_m}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{\sigma_s-\sigma_m}{2}\right)} \tag{5}$$

$$\alpha_{s',m}=\frac{\sin(2n+1)\left(\dfrac{\sigma_s+\sigma_m}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{\sigma_s+\sigma_m}{2}\right)} \tag{6}$$

である．

したがって，(3)，(4) 式における右辺の a，b の係数は (5)，(6) 式によって，あらかじめ計算しておくことができる．また，(3)，(4) 両式の左辺の値は，観測値を用いて計算することができる．したがって，(3)，(4) の式の左辺の値を各分潮について計算することによって，多元一次連立方程式を解けばよいことになる．第1表には，約1か月 (719個) の毎時の観測値を用いて13分潮の調和常数を求める場合の (3)，(4) 式の右辺の $(\alpha_{s,m}+\alpha_{s',m})$，$(\alpha_{s,m}-\alpha_{s',m})$ を計算した結果を示してある．ただし，(5)，(6) 式から明らかなように，s と m を入れ替えても α，α' の値は変わらないから，対角線に対称な欄の数値は省略してある．また約1か年 (8,641個) の毎時値を用いて同様な表を作成したが，前ページの脚注に述べたように，Horn が既に計算してあるのでここでは割愛する．

第1表からわかるように，普通1か月では分離できない分潮 K_1 と P_1，S_2 と K_2，N_2 と ν_2 との係数は非常に似通った係数が得られている．そこで，ここでは，K_1 と P_1，S_2 と K_2，N_2 と ν_2 との各分潮間には平衡潮汐論からの関係式

$$\begin{cases} R_{p1}=\dfrac{1}{3}R_{k1}, & K_{p1}=K_{k1}, \\ R_{k2}=0.272\,R_{s2}, & K_{k2}=K_{s2}, \\ R_{\nu2}=0.194\,R_{N2}, & K_{\nu2}=K_{N2} \end{cases} \tag{7}$$

を仮定する．すなわち，まず P_1，K_2，ν_2 の各分潮を省略して最小自乗法で各分潮の調和常数を決定し，次に，K_1，S_2，N_2 分潮は実際の K_1，S_2，N_2 の分潮のほかに，P_1，K_2，ν_2 の分潮がそれぞれ含まれていると考えて次の方法をとる．

3 K_1 と P_1，S_2 と K_2，N_2 と ν_2 の分離

いま K_1 分潮と P_1 分潮とを考えて，前節において K_1 分潮と P_1 分潮の合成したものが得られたと考えると．

$$R\cos(i\sigma_k-K)=a\cos i\sigma_k+b\sin i\sigma_k$$

一方，R_k，K_1 を求めるべき K_1 分潮の調和常数とし，$i=0$ における K_1 分潮と P_1 分潮の天文引数を V_k，V_p とおき，(7) の関係を仮定すれば，

$$\begin{aligned} R\cos(i\sigma_k-K)&=R_k\cos(V_k+i\sigma_k-K_1)+pR_k\cos(V_p+i\sigma_p-K_1) \\ &=R_k[\cos(V_k-K_1)+p\cos\{V_p-K_1+i(\sigma_p-\sigma_k)\}]\cos i\sigma_k \\ &\quad -R_k[\sin(V_k-K_1)+p\sin\{V_p-K_1+i(\sigma_p-\sigma_k)\}]\sin i\sigma_k \end{aligned}$$

と書ける．ここに $p=\dfrac{1}{3}$ である．したがって，

$$\begin{aligned} a&=R_k\overline{[\cos(V_k-K_1)+p\cos\{V_p-K_1+i(\sigma_p-\sigma_k)\}]} \\ &=R_k\left[\cos(V_k-K_1)\left\{1+2\frac{p\alpha_{p.k}}{(2n+1)}\cos(V_p-V_k)\right\}\right. \\ &\quad \left.-\sin(V_k-K_1)\cdot 2\frac{p\alpha_{p.k}}{(2n+1)}\sin(V_p-V_k)\right] \end{aligned} \tag{8}$$

TABLE 1. COEFFICIENTS OF a, b IN THE SYMMETRIC NORMAL EQUATIONS FROM 719 HOURLY OBSERVATIONS (UPPER FOR a, LOWER FOR b).

	a_0	K_1	O_1	P_1	Q_1	M_2	S_2	K_2	N_2	L_2	ν_2	μ_2	M_4	MS_4
a_0	719.0000	0.9660956	− 3.801569	− 2.910617	5.865898	− 1.380789	− 1.000000	0.9666590	2.388080	0.3086820	0.6860372	− 1.776904	− 1.338322	− 1.171312
K_1		359.9833 359.0167	29.04737 30.42816	343.2960 344.2960	− 25.70409 − 28.09217	− 2.199746 − 1.601823	− 1.631028 − 1.279589	0.9668514 − 0.0007510	3.580226 2.285672	0.7459737 0.8726010	1.303584 1.187784	− 2.824326 − 1.973881	− 1.470360 − 0.5507729	− 1.291776 − 0.5131800
O_1			357.8011 361.1989	3.596885 6.654978	− 26.48957 − 30.48194	− 0.5275187 1.493614	− 0.1289268 1.676029	2.084732 2.682653	1.818287 − 0.6551884	− 0.7236078 − 2.154182	− 0.3672870 − 2.037291	− 0.9686927 1.261638	− 1.087999 0.4900762	− 0.9232765 0.5718372
P_1				358.1416 360.8584	− 11.25411 − 14.96740	− 0.7560053 1.048951	− 0.3087494 1.274845	2.099946 2.451384	2.754634 − 0.1435522	− 0.6072452 − 1.797332	− 0.2045395 − 1.635113	− 1.254248 0.7668850	− 1.172780 0.3223340	− 0.9999645 0.4020422
Q_1					357.3466 361.6534	− 0.2021569 − 2.675632	− 0.4865376 − 2.784723	− 2.266186 − 3.560739	− 0.8920421 1.858138	1.216272 3.237405	0.9807771 3.211108	0.1158187 − 2.520396	0.7885443 − 0.9151716	0.6505700 − 1.008341
M_2						358.8308 360.1692	4.540276 5.711587	29.63728 29.83829	− 27.62157 − 29.34994	− 28.05781 − 28.91370	22.63817 21.60044	4.376125 5.875738	− 1.323767 − 0.0570218	− 1.092854 0.0928532
S_2							359.0000 360.0000	343.7878 343.8042	− 12.31569 − 13.90581	22.45571 21.78290	3.968530 3.112645	4.435757 5.774079	− 1.481306 − 0.2955986	− 1.238650 − 0.1421390
K_2								359.9845 359.0155	− 26.52508 − 27.27121	− 33.93541 − 33.58548	− 15.08184 − 14.91077	17.21275 17.60251	− 2.013170 − 1.384638	− 1.780893 − 1.277201
N_2									358.5024 360.4976	26.75379 28.09211	346.3604 347.8601	23.04769 21.19092	0.8640575 − 0.5553755	0.6613948 − 0.7079543
L_2										359.3409 359.6591	4.872435 5.379428	− 12.59189 − 13.62962	1.704803 0.6832767	1.462097 0.5462768
ν_2											359.1512 359.8488	− 27.87731 − 29.09420	1.564565 0.4438088	1.329521 0.3079941
μ_2												358.6731 360.3269	− 1.169415 0.1694143	− 0.9512064 0.3155391
M_4													358.9177 360.0823	4.557685 5.694178
MS_4														358.9503 360.0497

同様に

$$b=-R_k\left[\sin(V_k-K_1)\left\{1+2\frac{p\alpha_{p\,.\,k}}{(2n+1)}\cos(V_p-V_k)\right\}\right.$$

$$\left.+\cos(V_k-K_1)\cdot 2\frac{p\alpha_{p\,.\,k}}{(2n+1)}\sin(V_p-V_k)\right] \qquad (9)$$

となる．上の (8), (9) 式から求める K_1 分潮の調和常数 R_k, K_1 は

$$R_k{}^2=\frac{a^2+b^2}{\left\{1+2\frac{p\cdot\alpha_{p\,.\,k}}{(2n+1)}\cos(V_p-V_k)\right\}^2+\left\{2\cdot\frac{p\alpha_{p\,.\,k}}{(2n+1)}\sin(V_p-V_k)\right\}^2},$$

$$\cos(V_k-K_1)=\frac{R_k}{a^2+b^2}\left[a\left\{1+\frac{2p\cdot\alpha_{p\,.\,k}}{(2n+1)}\cos(V_p-K_1)\right\}-b\frac{2p\cdot\alpha_{p\,.\,k}}{(2n-1)}\sin(V_p-V_k)\right]$$

$$\sin(V_k-K_1)=-\frac{R_k}{a^2+b^2}\left[a\frac{2p\alpha_{p\,.\,k}}{(2n+1)}\sin(V_p-K_k)+b\left\{1+\frac{2p\alpha_{p\,.\,k}}{(2n+1)}\cos(V_p-V_k)\right\}\right]$$

から求められる．ここに $\alpha_{p\,.\,k}$ は (5) 式と同様に

$$\alpha_{p\,.\,k}=\frac{\sin(2n+1)\left(\frac{\sigma_p-\sigma_k}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\sigma_p-\sigma_k}{2}\right)}$$

である．

これらの式によって，1955年4月における浦神 {紀伊半島} の1か月の毎時の験潮資料 (719個) を用いて調和分解をして13分潮の調和常数を求めた結果を第2表に示した．また同表には (7) の関係式を用いずに直接13分潮の連立方程式を解いた場合の調和常数と， Darwin の方法による結果（実際には，当水路部で少し改正し

TABLE 2. COMPARISON OF HARMONIC CONSTANTS FROM DARWIN'S METHOD WITH THOSE FROM LEAST SQUARES METHOD.

分潮	Darwin の法		最小自乗法 (平衡潮汐論を仮定)		最小自乗法 (直接法)	
	H	K	H	K	H	K
K_1	cm 20.85	183°.24	cm 21.02	187°.64	cm 21.28	188°.97
O_1	16.79	166.10	16.47	166.65	15.99	166.86
P_1	6.95	183.24	7.15	187.64	7.69	188.39
Q_1	3.56	166.72	3.32	168.81	3.23	172.79
M_2	45.09	170.07	44.44	169.90	45.45	170.11
S_2	18.87	198.36	19.56	198.65	18.43	194.53
K_2	5.14	198.36	5.22	198.65	4.63	215.53
N_2	7.79	164.26	7.89	165.58	5.77	221.56
L_2	2.30	187.48	2.65	185.00	1.98	174.75
ν_2	1.51	164.26	1.53	165.58	6.04	48.75
μ_2	2.47	144.27	1.82	135.00	2.45	146.88
M_4	0.59	312.76	0.74	336.64	0.43	316.35
MS_4	0.23	174.00	0.15	54.69	0.12	97.96
S_0	144.58		144.51		144.55	

た方法であるが以下 Darwin の方法と呼んでおく．この場合には (7) の関係式を用いている）を掲げてある．

4 調和常数の精度

最小自乗法の理論によると，各未知量 a, b の標準偏差 σ は

$$\sigma^2=\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-m}[\lambda\lambda]$$

で表わされる．ここに ε は観測値と計算値との偏差，n は観測回数（この場合には $n=719$)，m は未知量の数，$[\lambda\lambda]$ は連立方程式の未知量の係数だけから決定される数値で，a_m に対する $[\lambda\lambda]$ は $(\alpha_{m,m}+\alpha_{m',m})$ を含む行の右辺だけが1で，他の行の右辺は0であるとしたときの連立方程式の a_m の値である．第3表には3の方法によるものと，直接連立方程式を解いた場合の各分潮の a, b の $[\lambda\lambda]$ を計算して掲げてある．この表から，直接法によると分離不可能な分潮に対しては誤差が大きいことを明らかに示している．また a, b に対する $[\lambda\lambda]$ は第1表の対角線の数値の逆数にほとんど等しいから，a, b の精度はほぼ観測値の個数の平方根に比例している．言いかえれば，観測期間の平方根に比例していると考えることができよう．

また，$\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-m}}$ は実測値と推算値との標準偏差に相当する量で，普通日本沿岸では10 cm 程度（浦神のこの年月の場合には9.8 cm であった）である．また第3表から $[\lambda\lambda]\fallingdotseq 3\times10^{-3}$ であるから

$$\sigma\fallingdotseq 10\times\sqrt{3\times10^{-3}}=0.55\ (\mathrm{cm})$$

となる．すなわち1か月の毎時潮高を使用した場合には，各分潮の $R\cos K$, $R\sin K$ ともに0.5～0.6 cm程度の標準偏差の変動があると考えられる．

5 1か月の調和分解結果による調和常数の変動

前述と同年の1955年における浦神の各月の毎時潮高を用いて Darwin の方法で調和分解した結果によると

TABLE 3. ACCURACIES OF a, b FOR EACH TIDAL CONSTITUENT.

分潮	平衡潮汐論を仮定		直接法	
	a	b	a	b
K_1	3.124×10^{-3}	3.140×10^{-3}	3.510×10^{-2}	3.552×10^{-2}
O_1	2.828×10^{-3}	2.807×10^{-3}	2.983×10^{-3}	2.941×10^{-3}
P_1			3.495×10^{-2}	3.500×10^{-2}
Q_1	2.827×10^{-3}	2.801×10^{-3}	2.868×10^{-3}	2.836×10^{-3}
M_2	2.818×10^{-3}	2.811×10^{-3}	8.763×10^{-3}	9.124×10^{-3}
S_2	2.404×10^{-3}	2.400×10^{-3}	9.911×10^{-2}	9.819×10^{-2}
K_2			9.289×10^{-2}	9.166×10^{-2}
N_2	2.671×10^{-3}	2.658×10^{-3}	2.169×10^{-1}	2.328×10^{-1}
L_2	2.826×10^{-3}	2.826×10^{-3}	7.273×10^{-3}	7.389×10^{-3}
ν_2			2.230×10^{-1}	2.391×10^{-1}
μ_2	2.804×10^{-3}	2.791×10^{-3}	6.716×10^{-3}	6.991×10^{-3}
M_4	2.787×10^{-3}	2.778×10^{-3}	2.788×10^{-3}	2.780×10^{-3}
MS_4	2.787×10^{-3}	2.778×10^{-3}	2.787×10^{-3}	2.780×10^{-3}
S_0	1.391×10^{-3}		1.393×10^{-3}	

TABLE 4. RESULTS OF HARMONIC ANALYSIS (DARWIN'S METHOD) FROM MONTHLY OBSERVATIONS IN 1955 AT URAGAMI.

分潮	1 月		2 月		3 月		4 月		5 月		6 月		7 月		8 月		9 月		10 月		11 月		12 月		平 均	
	H(cm)	K(°)	H(cm)	K(°)	H(cm)	K(°)	H(cm)	K(°)	H(cm)	K(°)	H(cm)	K(°)	H(cm)	K(°)	H(cm)	K(°)	H(cm)	K(°)	H(cm)	K(°)	H(cm)	K(°)	H(cm)	K(°)	H(cm)	K(°)
K_1	21.86	187.71	22.25	191.31	20.14	201.18	20.85	183.24	21.01	183.75	21.08	187.22	19.92	187.64	20.64	184.77	21.42	183.87	21.40	184.63	20.66	191.78	19.81	188.92	21.00	187.97
O_1	17.76	170.51	17.22	164.44	15.80	158.22	16.79	166.10	17.00	169.27	16.92	168.40	16.10	167.17	16.64	166.39	16.15	167.84	16.63	166.54	15.42	175.42	14.57	166.39	16.40	167.32
P_1	7.29	187.71	7.42	191.31	6.71	201.18	6.95	183.24	7.00	183.75	7.03	187.22	6.64	187.64	6.88	184.77	7.14	183.87	7.13	184.63	6.89	191.78	6.60	188.92	6.97	188.30
Q_1	3.24	156.59	4.10	158.99	3.81	204.38	3.59	166.72	3.86	151.56	3.91	162.60	4.21	147.38	2.97	155.21	3.01	154.18	3.04	162.83	3.78	189.93	3.53	161.89	3.43	164.75
M_2	45.86	170.67	45.88	170.15	43.75	168.51	45.09	170.07	45.25	171.86	45.55	166.96	45.23	169.09	46.16	165.83	46.36	165.91	44.86	169.66	42.76	173.30	43.06	170.67	44.95	169.49
S_2	21.38	201.20	19.85	198.06	18.27	194.62	18.87	198.36	18.25	203.81	19.86	200.08	20.61	197.86	20.20	193.77	20.47	189.30	20.15	189.15	19.64	190.74	20.92	199.30	19.81	196.42
K_2	5.82	201.20	5.41	198.06	4.98	194.62	5.14	198.36	4.97	203.81	5.41	200.08	5.61	197.86	5.50	193.77	5.58	189.30	5.49	189.15	5.35	190.74	5.70	199.30	5.41	196.09
N_2	7.90	160.83	8.43	160.88	8.85	167.38	7.79	164.26	8.09	167.70	8.13	160.60	7.78	153.47	7.44	165.83	8.38	158.09	7.29	160.31	7.19	176.45	8.50	166.39	7.94	163.16
L_2	1.99	206.15	1.30	212.30	1.16	324.04	2.30	187.48	1.10	156.52	2.14	171.65	0.71	197.13	1.30	181.73	0.60	235.10	1.33	186.44	2.62	165.14	1.69	153.50	1.30	184.40
ν_2	1.53	160.83	1.64	160.88	1.72	167.38	1.51	164.26	1.57	167.70	1.58	160.60	1.51	153.47	1.44	165.83	1.63	158.09	1.41	160.31	1.39	176.45	1.65	166.39	1.55	165.07
μ_2	2.73	230.37	1.28	187.56	2.68	301.04	2.47	144.27	2.76	170.34	2.00	149.39	0.91	175.53	1.31	211.27	0.47	131.39	1.04	138.82	1.91	180.61	3.64	136.73	1.30	175.60
M_4	0.26	316.12	0.17	334.51	2.76	40.46	0.59	312.76	0.19	340.45	0.53	235.26	0.89	283.39	0.07	243.11	0.27	240.24	0.31	292.74	0.71	136.00	0.81	30.78	0.30	0.00
MS_4	0.43	347.72	0.37	22.25	2.73	113.05	0.23	174.00	0.62	36.52	0.10	190.16	0.75	284.65	0.72	322.87	0.23	350.47	0.31	5.58	1.45	200.46	1.16	303.03	0.035	45.00
S_0	145.00		146.17		147.33		144.58		153.87		149.50		153.21		160.67		156.79		154.33		148.33		148.46		150.69	

第4表のとおりである．この表からわかるように，振幅1cm 以下のたとえば MS_4 のような分潮は非常に変動の大きいことを示している．したがって，このような分潮については調和常数を求めることは無意味になってくるのではないかと考えられる．またこの表から，$a=R\cos K$, $b=R\sin K$ を求め，これらの各分潮の平均値からの偏差がみな同じ分布をしていると仮定して標準偏差 σ を求めてみると，

$$\sigma \fallingdotseq 0.79\,\mathrm{cm}$$

が得られた．これは最小自乗法から得られた 0.5〜0.6 cm とほとんど一致していると言える．

6 むすび

ここでは，最小自乗法による1か月の毎時の観測値を用いて調和分解した結果を述べたが，1年の観測値を用いれば当然精度が良くなると考えられる．またこの方法によれば，多少プログラムを変更し，計算時間はかかるが，途中欠測のある場合でも調和分解を実行できるはずである．なお1か月の観測値を用いた場合に，HIPAC 103 の電子計算機を使用した場合の計算時間は約10分であった．

参考文献

Cartwright, D. E. 1961, "A Study of Currents in the Strait of Dover" *Jour. Inst. Navig.*, **14**, No. 2, 130.

Doodson, A. T. 1928, "The analysis of total observations" *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A **227**, 223.

Doodson, A. T. and Warburg, H. D. 1941, "*Admiralty Manual of Tides*" H. M. S. O., London, p. 103.

Horn, W. 1960, "Some Recent Approaches to Tidal Ploblems" *Int. Hydrogr. Rev.*, **37**, No. 2, 65.

Miyazaki, M. 1958, "A Method for the Harmonic Analysis of Tides" *The Oceanogr. Mag.*, **10**, No. 1, 65.

芝 亀吉 1943，"最小自乗法" 応用数学第9巻，河出書房，91.