

海図上の方位大圏の性質

進士 晃・久保良雄

PROPERTIES OF GREAT CIRCLE ON CHART

Akira M. Sinzi and Yoshio Kubo

Received December 7, 1966

Abstract

Expansion formulae about geodesic line on chart of Mercator projection are derived. In section 2, lengths of tangent and normal to projected geodesic, length of rectilinear chord, and angle between rectilinear chord and tangent to the projected geodesic are expanded in power series of true length S of the geodesic [eqs. (8)~(11)].

In section 3, curvature σ of projected geodesic [eq. (22)] on Mercator projection and its derivatives σ' , σ'' , σ''' are given [eqs. (27)~(30)] with their respective values at the beginning point of the geodesic [eqs. (31)~(37)]. Similar quantities for scale k are also obtained [eqs. (39)~(42) and (43)~(49)].

In section 4, some examples of applications of quantities obtained in section 3 are shown. (i) For given length m of projected geodesic on chart, minimum limit of scale by which great circle can be approximated by straight line and that by which geodesic can be approximated by great circle are derived for standard parallel [eqs. (57) and (58)]. Both of these limits hold for enough larger scales. In TABLES 1 (for $m=1$ metre) and 2 (for $m=0.1$ metre) examples of these scale limits are shown.

(ii) Correction formulae to obtain the terminal of geodesic from a point, which is plotted on chart by employing directly given azimuth T of the geodesic and its true length S , are derived [eqs. (59)~(62)] and their auxilliary quantities are given in TABLES 3 and 4.

(iii) Maximum displacement of rectilinear chord from the projected geodesic occurs at about mid-point of the projected geodesic when the geodesic is not too large. Formulae to evaluate this mid-point displacement $h_{\frac{1}{2}}$ and its corresponding distance on the earth surface $H_{\frac{1}{2}}$ are also derived [eqs. (65)~(67)] and examples are shown in TABLE 5 for latitudes 25° to 45° .

1 序

地球表面上に描かれる種々の曲線のうちで、航海にとって最も基本的なものは、いうまでもなく、大圏と航程線である。大圏は地球表面上の任意の2点を最短距離で結ぶものであり、したがって、方位は2個の大圏の交角によって測られる。大圏は、厳密には、地球楕円体上の測地線であることはいうまでもない。一方、航程線は、針路を一定としたときの航跡であり、現在海図がメルカトル投影を採用しているのも、この航程線が直線で表現されることによっている。

しかし、このメルカトル投影図、すなわち、漸長海図のうえで、大縮尺または近距離の場合には、しばしば大圏を直線で代用することが多い。また、それより縮尺が小さく、または距離が大きくなった場合でも、地球楕円体を球と見なし、測地線を大圏で代用できる。

実際の航海では、その状況に応じて、適宜に近似を行なうことができるし、また、当然近似を行なうべき場合がしばしば起こる。いたずらに厳密な計算を行なうことは、時間と労力のむだであるばかりでなく、かえって、不測の誤りの原因となるからである。

しかし、海図を調整する立場から見ると、このような航海の実際面における近似や便法を考慮して、これらに十分に耐えるような精度で海図を作らなければならない。たとえば、無線方位の測定精度が 1° であるからといって、海図を調製するにあたって、方位線を 1° の精度で計算し、製図し、印刷するにも精度 1° で版を合わせたりしては、誤差はたちまち急増し、航海の実用に耐え得なくなってしまう。

たまたま、今年8月、専管水域の漁船用に、対馬西岸にトーキング・ビーコンが3局設けられ、水路部ではこのために海図7501号を刊行した。この場合は、トーキング・ビーコンの有効範囲も約20M程度の狭いものであり、その精度も 1° より高いことは望めないので、直線から大圏への補正には、いわゆる Givry の角を用いて作図したが、この機会に、漸長図上の大圏の性質を調べたので報告する。

2 基本式

Fig. 1. はメルカトル投影図上で2点 PQ 間の測地線と航程線との関係を示したものである。この図は、実際の海図用紙上の図ではなく、地球楕円体についてメルカトルの投影を施しただけのものである。すなわち紙の大きさによる引き縮めは考えに入れてない。いわば、近似的には、地球を大きな紙で、すっぽりと巻いたその紙面への投影である。この場合の縮尺（実際には拡大率）を、かりに原縮尺 (urscale) と名づけ、 k で表わすことにする。すなわち、地球表面上の実距離 S と、その投影 s との関係は

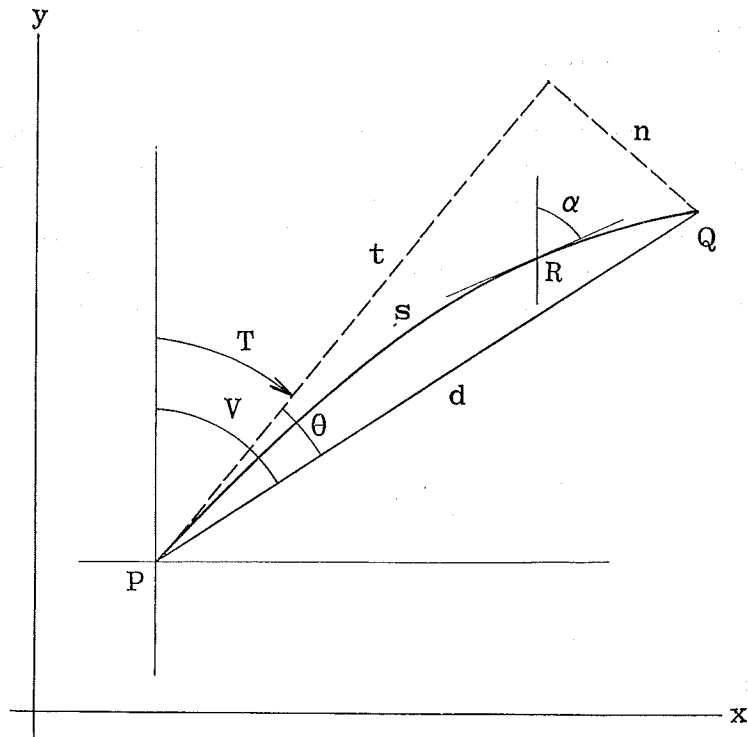


Fig. 1.

$$k=ds/dS. \tag{1}$$

図において、 x 軸は緯線、 y 軸は経線であり、

d は投影された航程線の長さ、

s は投影された測地線の長さ、

t は投影された測地線に、始点 P で引いた切線、

n はこの切線に、端点 Q から下した垂線、

T はこの切線と経線とのなす角、すなわち P から見た Q の真方位、

V は漸長方位、

である。つぎに

σ を投影された測地線の曲率、

$\sigma', \sigma'', \sigma''', \dots$ をその s に関する 1 次、2 次、3 次、……の微係数とし、これらの始点 P における値を $\sigma_0, \sigma_0', \sigma_0'', \sigma_0''', \dots$ とすれば、

$$t = s - \frac{s^3}{6} \sigma_0^2 - \frac{s^4}{8} \sigma_0 \sigma_0' - \frac{s^5}{120} (4\sigma_0 \sigma_0'' + 3\sigma_0'^2 - \sigma_0^4) - \dots, \tag{2}$$

$$n = \frac{s^2}{2} \sigma_0 + \frac{s^3}{6} \sigma_0' + \frac{s^4}{24} (\sigma_0'' - \sigma_0^3) + \frac{s^5}{120} (\sigma_0''' - 6\sigma_0^2 \sigma_0') + \dots, \tag{3}$$

$$d = s - \frac{s^3}{24} \sigma_0^2 - \frac{s^4}{24} \sigma_0 \sigma_0' - \frac{s^5}{5760} (72\sigma_0 \sigma_0'' + 64\sigma_0'^2 - 3\sigma_0^4) - \dots, \tag{4}$$

$$\theta = V - T = -\frac{s}{2} \sigma_0 - \frac{s^2}{6} \sigma_0' - \frac{s^3}{24} \sigma_0'' - \frac{s^4}{720} (6\sigma_0''' - \sigma_0^2 \sigma_0') + \dots, \tag{5}$$

で表わされる。ここに使われる s は、原縮尺 k とその s に関する微係数 k', k'', k''', \dots の P における値 $k_0, k_0', k_0'', k_0''', \dots$ 、および 2 点 PQ 間の地球表面上の実距離 S によって表わされて、

$$s = k_0 S + \frac{1}{2} k_0 k_0' S^2 + \frac{1}{6} (k_0^2 k_0'' + k_0 k_0'^2) S^3 + \frac{1}{24} (k_0^3 k_0''' + 4k_0^2 k_0' k_0'' + k_0 k_0'^3) S^4 + \dots, \tag{6}$$

となる。また曲率 σ は一般に、 k および測地線が任意の子午線と交わる角 α によって表わされる。

$$\sigma = \frac{1}{k} \left(-\frac{\partial k}{\partial x} \cos \alpha - \frac{\partial k}{\partial y} \sin \alpha \right). \tag{7}$$

以上は投影図法の如何にかかわらない基本式で、通常の投影の教科書（たとえば、Thomas, 1952）に掲げられているものである。いま (6) を (2), (3), (4), (5) に代入すると、これらは S に関する展開式となる。すなわち

$$\begin{aligned} t &= k_0 S + \left[-\frac{1}{2} k_0 k_0' \right] S^2 + \left[\frac{1}{6} (k_0^2 k_0'' + k_0 k_0'^2 - \sigma_0^2 k_0^3) \right] S^3 \\ &+ \left[\frac{1}{24} (k_0^3 k_0''' + 4k_0^2 k_0' k_0'' + k_0 k_0'^3) - \frac{1}{4} \sigma_0^2 k_0^3 k_0' - \frac{1}{8} \sigma_0 \sigma_0' k_0^4 \right] S^4 \\ &+ \left[\frac{1}{120} (k_0^4 k_0'''' + 7k_0^3 k_0' k_0''' + 4k_0^3 k_0''^2 + 11k_0^2 k_0'^2 k_0'' + k_0 k_0'^4) - \frac{1}{24} \sigma_0^2 (2k_0^4 k_0'' \right. \\ &\left. + 5k_0^3 k_0'^2) - \frac{1}{4} \sigma_0 \sigma_0' k_0^4 k_0' - \frac{1}{120} (4\sigma_0 \sigma_0' + 3\sigma_0'^2 - \sigma_0^4) k_0^5 \right] S^5, \tag{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u = & \left\{ \frac{1}{2} \sigma_0 k_0^2 \right\} S^2 + \left\{ \frac{1}{2} \sigma_0 k_0^2 k_0' + \frac{1}{6} \sigma_0' k_0^3 \right\} S^3 \\
& + \left\{ \frac{1}{24} \sigma_0 (4k_0^3 k_0'' + 7k_0^2 k_0'^2) + \frac{1}{4} \sigma_0' k_0^3 k_0' + \frac{1}{24} (\sigma_0'' - \sigma_0^3) k_0^4 \right\} S^4 \\
& + \left\{ \frac{1}{24} \sigma_0 (k_0^4 k_0''' + 6k_0^3 k_0' k_0'' + 3k_0^2 k_0'^3) + \frac{1}{24} \sigma_0' (2k_0^4 k_0'' + 5k_0^3 k_0'^2) \right. \\
& \left. + \frac{1}{12} (\sigma_0'' - \sigma_0^3) k_0^4 k_0' + \frac{1}{120} (\sigma_0''' - 6\sigma_0^2 \sigma_0') k_0^5 \right\} S^5, \quad (9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s-d = & \left\{ -\frac{1}{24} \sigma_0^2 k_0^3 \right\} S^3 + \left\{ \frac{1}{16} \sigma_0^2 k_0^3 k_0' + \frac{1}{24} \sigma_0 \sigma_0' k_0^4 \right\} S^4 \\
& + \left\{ -\frac{1}{96} \sigma_0^2 (2k_0^4 k_0'' + 5k_0^3 k_0'^2) + \frac{1}{12} \sigma_0 \sigma_0' k_0^4 k_0' + \frac{1}{5760} (72\sigma_0 \sigma_0'' + 64\sigma_0'^2 - 3\sigma_0^4) k_0^5 \right\} S^5, \quad (10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta = & \left\{ -\frac{1}{2} \sigma_0 k_0 \right\} S + \left\{ \frac{1}{2} \sigma_0 k_0 k_0' + \frac{1}{6} \sigma_0' k_0^2 \right\} S^2 + \left\{ \frac{1}{12} \sigma_0 (k_0^2 k_0'' + k_0 k_0'^2) + \frac{1}{6} \sigma_0' k_0^2 k_0' \right. \\
& + \frac{1}{24} \sigma_0'' k_0^3 \left. \right\} S^3 + \left\{ \frac{1}{48} \sigma_0 (k_0^3 k_0''' + 4k_0^2 k_0' k_0'' + k_0 k_0'^3) + \frac{1}{72} \sigma_0' (4k_0^3 k_0'' + 7k_0^2 k_0'^2) \right. \\
& \left. + \frac{1}{16} \sigma_0'' k_0^3 k_0' + \frac{1}{720} (6\sigma_0''' - \sigma_0^2 \sigma_0') k_0^4 \right\} S^4. \quad (11)
\end{aligned}$$

以下、これらをメルカトル投影に適用する。

3 漸長投影における展開式

記号	φ, λ : 緯度, 経度,
	a : 地球楕円体の赤道半径,
	e : 地球楕円体の離心率,
	N : 子午線楕円の法線の長さ,
	R : 子午線楕円の曲率半径.

(i) σ の計算 漸長図は円筒投影であるから, $\frac{\partial k}{\partial x} = 0$, したがって (7) は

$$\sigma = -\frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial y} \sin \alpha. \quad (12)$$

この式の右辺の k および y は, 漸長投影ではつぎの形をとり, いずれも φ の関数である.

$$k = \frac{a}{N} \sec \varphi = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \sec \varphi, \quad (13)$$

$$y = a \log \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} \right]. \quad (14)$$

これらをそれぞれ φ について微分すれば

$$\frac{\partial k}{\partial \varphi} = \frac{(1 - e^2) \tan \varphi \sec \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{a(1 - e^2) \sec \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}. \quad (16)$$

ゆえに

$$\frac{\partial k}{\partial y} = \left(\frac{\partial k}{\partial \varphi} \right) / \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{a} \tan \varphi \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \quad (17)$$

つぎに (12) の $\sin \alpha$ を求める。一般に緯度 φ で子午線と交わる測地線の方程式は、 c を常数として

$$N \cos \varphi \sin \alpha = c \quad (18)$$

であり、測地線の起点において $\varphi = \varphi_0$, $\alpha = \alpha_0$, $N = N_0$ とすれば

$$N_0 \cos \varphi_0 \sin \alpha_0 = c \quad (19)$$

この起点の投影が Fig. 1. の点 P である。漸長図は正角投影であら

$$\alpha_0 = T.$$

したがって (18), (19) から

$$c = N_0 \cos \varphi_0 \sin T = \frac{a \cos \varphi_0 \sin T}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0}} \quad (20)$$

$$\sin \alpha = \frac{c}{N \cos \varphi} = \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi} \sqrt{\frac{1 - e^2 \sin^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0}} \sin T \quad (21)$$

(13), (17), (21) を (12) に代入すると

$$\sigma = -\frac{c}{a^2} \tan \varphi \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \quad (22)$$

これが、漸長図上で緯度 φ における測地線の曲率半径の方程式である。

(ii) $\frac{d\varphi}{ds}$ の計算 展開式 (8), (9), (10), (11) の係数はすべて $\sigma_0, \sigma'_0, \sigma''_0, \sigma'''_0, \dots$ および $k_0, k'_0, k''_0, k'''_0, \dots$ から成っている。これらを求めるのに、 σ および k はすでに (i) において与えられているから、われわれは $\sigma', \sigma'', \sigma''', \dots$ および k', k'', k''', \dots を求めればよい。そのためには、一般に任意の変数 p について $\frac{d^n p}{ds^n} = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{d^{n-1} p}{ds^{n-1}} \right) \frac{d\varphi}{ds}$ であるから、まず $\frac{d\varphi}{ds}$ を計算しておく必要がある。

一般に楕円体表面上の線要素の方程式は

$$dS = N \cos \varphi \sqrt{\frac{R^2}{N^2} \sec^2 \varphi d\varphi^2 + d\lambda^2} \quad (23)$$

であり、また測地線については

$$N^2 \cos^2 \varphi \frac{d\lambda}{ds} = c \quad (24)$$

であるから、この2式から $d\lambda$ を消去して

$$\left(1 - \frac{c^2}{N^2 \cos^2 \varphi} \right) dS^2 = R^2 d\varphi^2.$$

これから

$$\frac{d\varphi}{dS} = \pm \sqrt{\frac{N^2 \cos^2 \varphi - c^2}{R^2 N^2 \cos^2 \varphi}} = \pm \frac{1 - e^2 \sin^2 \varphi}{a(1 - e^2)} \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2} \frac{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)}{\cos^2 \varphi}} \quad (25)$$

ただし、負号は $\pi/2 < T < 3\pi/2$ の場合であるが、以下、簡単のため正符号の場合のみ考えることにする。した

がって (1) により

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dS} \frac{dS}{ds} = \frac{1}{k} \frac{d\varphi}{dS} = \frac{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}}{a(1-e^2)} \sqrt{\cos^2 \varphi - \frac{c^2}{a^2} (1-e^2 \sin^2 \varphi)} . \quad (26)$$

(iii) $\sigma_0, \sigma_0', \sigma_0'', \sigma_0''', \dots$ および $k_0, k_0', k_0'', k_0''', \dots$ の計算 σ については, まず (22) から

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{d\sigma}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds} = -\frac{c}{a^3(1-e^2)} \sqrt{\cos^2 \varphi - \frac{c^2}{a^2} (1-e^2 \sin^2 \varphi)} \left\{ (1-e^2) \sec^2 \varphi + e^2 \cos^2 \varphi \right\}, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{ds^2} &= \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{d\sigma}{ds} \right) \frac{d\varphi}{ds} = \frac{c\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}}{a^4(1-e^2)^2} \sin \varphi \cos \varphi \left[\left(1 - \frac{c^2 e^2}{a^2} \right) \left\{ (1-e^2) \sec^2 \varphi + e^2 \cos^2 \varphi \right\} \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(e^2 - \frac{1-e^2}{\cos^4 \varphi} \right) \left\{ \cos^2 \varphi - \frac{c^2}{a^2} (1-e^2 \sin^2 \varphi) \right\} \right], \end{aligned} \quad (28)$$

とくに, 地球楕円体を球で近似すれば, $e=0$ であるから,

$$\frac{d^2\sigma}{ds^2} = -\frac{c}{a^4} \tan \varphi \left(1 - \frac{2c^2}{a^2} \sec^2 \varphi \right), \quad (29)$$

$$\frac{d^3\sigma}{ds^3} = -\frac{c}{a^5} \sec^4 \varphi \sqrt{\cos^2 \varphi - \frac{c^2}{a^2}} \left\{ \cos^2 \varphi - \frac{2c^2}{a^2} (\cos^2 \varphi + 3 \sin^2 \varphi) \right\}, \quad (30)$$

したがって投影された測地線の始点 P においては, (20) を使って (22) から

$$\sigma_0 = -\frac{1}{a} \sin \varphi_0 \sin T, \quad (31)$$

(27), (28) から, それぞれ

$$\sigma_0' = -\frac{1}{a^2(1-e^2)} \frac{\cos^2 \varphi_0}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi_0}} \left\{ (1-e^2) \sec^2 \varphi_0 + e^2 \cos^2 \varphi_0 \right\} \sin T \cos T, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \sigma_0'' &= -\frac{\sin \varphi_0 \cos^2 \varphi_0}{a^3(1-e^2)^2} \left\{ \left(\frac{e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 T}{1-e^2 \sin^2 \varphi_0} - 1 \right) \left\{ (1-e^2) \sec^2 \varphi_0 + e^2 \cos^2 \varphi_0 \right\} \right. \\ &\quad \left. + 2 \cos^2 \varphi_0 \cos^2 T \left(\frac{1-e^2}{\cos^4 \varphi_0} - e^2 \right) \right\} \sin T. \end{aligned} \quad (33)$$

また, 地球を球で近似すれば (31), (32), (29), (30) において, それぞれ $e=0$ として,

$$\sigma_0 = -\frac{1}{a} \sin \varphi_0 \sin T, \quad (34)$$

$$\sigma_0' = -\frac{1}{a^2} \sin T \cos T, \quad (35)$$

$$\sigma_0'' = -\frac{1}{a^3} \sin \varphi_0 \sin T (1-2\sin^2 T), \quad (36)$$

$$\sigma_0''' = -\frac{1}{a^4} \left\{ \cos^2 T - (1+4 \sin^2 \varphi_0) \sin^2 T \right\} \sin T \cos T, \quad (37)$$

つぎに k については (13) から

$$\frac{dk}{d\varphi} = \frac{1-e^2}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} \tan\varphi \sec\varphi . \tag{38}$$

したがって

$$\frac{dk}{ds} = \frac{dk}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{a} \tan\varphi \sec\varphi \sqrt{\cos^2\varphi - \frac{c^2}{a^2}(1-e^2\sin^2\varphi)} , \tag{39}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2k}{ds^2} &= \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{dk}{ds} \right) \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{a^2(1-e^2)} \left\{ \frac{\cos^3\varphi + 2\cos\varphi\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi} \left\{ \cos^2\varphi - \frac{c^2}{a^2}(1-e^2\sin^2\varphi) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{c^2 e^2}{a^2} - 1 \right) \tan\varphi \sin\varphi \right\} , \end{aligned} \tag{40}$$

.....

地球を球で近似すれば, $e=0$ として

$$\frac{d^2k}{ds^2} = \frac{1}{a^2} \left\{ 1 - \frac{c^2}{a^2} (1 + 2\tan^2\varphi) \right\} \sec\varphi , \tag{41}$$

$$\frac{d^3k}{ds^3} = \frac{1}{a^3} \sqrt{\cos^2\varphi - \frac{c^2}{a^2}} \left\{ \cos^2\varphi - \frac{c^2}{a^2} (5 + \sin^2\varphi) \right\} \tan\varphi \sec^3\varphi , \tag{42}$$

.....

したがって, 投影図上で測地線の始点 P においては, (20) を使って (13) から

$$k_0 = \sqrt{1-e^2\sin^2\varphi_0} \sec\varphi_0 . \tag{43}$$

(39), (40) から, それぞれ

$$k_0' = \frac{1}{a} \tan\varphi_0 \cos T , \tag{44}$$

$$k_0'' = \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi_0}}{a^2(1-e^2)\cos\varphi_0} \left\{ (\cos^2\varphi_0 + 2\sin^2\varphi_0) \cos^2 T - \sin^2\varphi_0 \left(1 - \frac{e^2 \cos^2\varphi_0 \sin^2 T}{1-e^2\sin^2\varphi_0} \right) \right\} , \tag{45}$$

.....

また, 地球を球で近似すれば, (43), (44), (41), (42) において, それぞれ $e=0$ として

$$k_0 = \sec\varphi_0 , \tag{46}$$

$$k_0' = \frac{1}{a} \tan\varphi_0 \cos T , \tag{47}$$

$$k_0'' = \frac{1}{a^2} (\cos^2 T - \sin^2\varphi_0 \sin^2 T) , \tag{48}$$

$$k_0''' = \frac{1}{a^3} \tan\varphi_0 \left\{ \cos^2 T - \sin^2 T (4 + \sin^2\varphi_0) \right\} \cos T , \tag{49}$$

.....

以上得られた $\sigma_0, \sigma_0', \sigma_0'', \sigma_0''', \dots$ および $k_0, k_0', k_0'', k_0''', \dots$ を (8), (9), (10), (11) に使えば, 漸長図上における測地線について, $t, n, s-d, \theta$ が計算できる。

4 応用の例

(i) 製図において近似できる限界

Fig. 2. は、実際的大海図上の場合である。このときは、海図の使用目的によって縮尺が定められる。いま κ という量を縮尺係数 (scale factor) と名づけ、縮尺 $1/f$ はこの縮尺係数を原縮尺に乗じたものであるとする。 φ_s を海図の基準緯度とすれば、

基準緯度 φ_s における縮尺は

$$\frac{1}{f_s} = \kappa k_s, \quad (50)$$

測地線の起点 φ_0 における縮尺は

$$\frac{1}{f_0} = \kappa k_0 = \frac{1}{f_s} \frac{k_0}{k_s}, \quad (51)$$

任意の緯度 φ における縮尺は

$$\frac{1}{f} = \kappa k = \frac{1}{f_s} \frac{k}{k_s}, \quad (52)$$

赤道 $\varphi=0$ における縮尺は

$$\frac{1}{f_E} = \kappa = \frac{1}{f_s k_s}, \quad (53)$$

となり、縮尺係数は赤道における縮尺にはかならない。

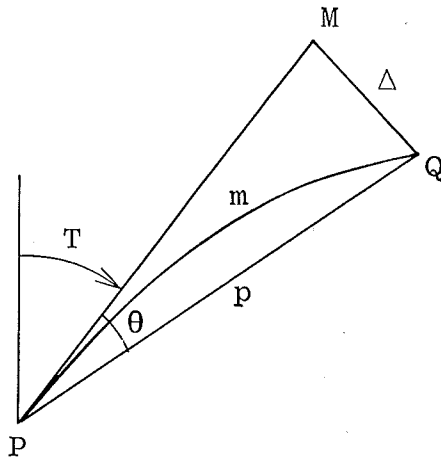


Fig. 2.

いま点 P を通り、与えられた真方位 T をとるような測地線 (方位大圏) を描く問題を考える。地球表面上の実距離 S に対応する図上距離は、 $m = \kappa s$ で表わされる。 P において投影された測地線上に点 Q をとり、 $\overline{PQ} = m$ とすれば、航程線 PQ の図上の距離は、 $\overline{PQ} = p = \kappa d$ となる。投影された測地線の切線上に点 M をとり、 $PM = p$ とすれば、この切線 PM と航程線 PQ との夾角は (5) で与えられ θ である。 $\theta \ll 1$ であれば

$$d = \overline{QM} = p\theta = \theta \kappa d.$$

したがって、この d が、海図作製の精度の限界 δ より小ならば、切線を以て測地線に代用できる。この切線も航程線のひとつであることはいうまでもない。

(4) からわかるように、 $s-d$ の展開は s^3 から始っているから、上の式によって d の値を算出するときには、 θ の展開を s^2 までにとどめるならば、 d を s で近似できる。すなわち、 p を m で近似して、

$$d \approx m\theta .$$

したがって (5) から

$$\begin{aligned} d &= m \left(\frac{s}{2} \sigma_0 + \frac{s^2}{6} \sigma_0' + \dots \right) \\ &= \frac{m^2}{2\kappa} \sigma_0 + \frac{m^3}{6\kappa^2} \sigma_0' + \dots . \end{aligned}$$

(50) によって

$$d = \frac{1}{2} f_s k_s m^2 \sigma_0 + \frac{1}{6} f_s^2 k_s^2 m^3 \sigma_0' + \dots .$$

これに (31), (32) を代入すれば、

$$\begin{aligned} d &= -\frac{m^2}{2a} f_s \sec \varphi_s \sin \varphi_0 \sin T \\ &\quad + \frac{m^2 e^2}{4a} f_s \tan \varphi_s \sin \varphi_s \sin \varphi_0 \sin T \\ &\quad - \frac{m^3}{6a^2} f_s^2 \sec^2 \varphi_s \sec \varphi_0 \sin T \cos T \\ &\quad - \frac{m^3 e^2}{6a^2} f_s^2 (\tan^2 \varphi_s \sec \varphi_0 - \sec^2 \varphi_s \cos^3 \varphi_0) \sin T \cos T \\ &\quad + \dots . \end{aligned} \tag{54}$$

ここで $\frac{m}{a} f \ll 1$ と仮定して、この展開の第 1, 第 2 項のみをとり、それぞれの絶対値を d_p, d_e で表わすことにすれば、

$$d_p = \left| -\frac{m^2}{2a} f_s \sec \varphi_s \sin \varphi_0 \sin T \right| , \tag{55}$$

$$d_e = \left| \frac{m^2 e^2}{4a} f_s \tan \varphi_s \sin \varphi_s \sin \varphi_0 \sin T \right| . \tag{56}$$

$d_p < \delta$ であれば、直線をもって大圏を近似することができて、その限界の縮尺は

$$F_p = \frac{2a\delta}{m^2} \cos \varphi_s \operatorname{cosec} \varphi_0 , \tag{57}$$

の逆数で与えられ、

$d_e < \delta$ であれば、大圏をもって測地線を近似することができて、その限界の縮尺は

$$F_e = \frac{4a\delta}{e^2 m^2} \cot \varphi_s \operatorname{cosec} \varphi_s \operatorname{cosec} \varphi_0 , \tag{58}$$

の逆数で与えられる。

TABLE 1 に (57) の計算例を示す。ここでは、 m の長さとして海図用紙の大きさ 1 メートルを、また δ の大きさとして、製図の限界 0.2 ミリメートルを使ってある。表の横の引数は基準緯度で、縦の引数は大圏の起点の緯度である。たとえば、基準緯度をわが国の海図に一般に採用されている 35° とすれば、緯度 10° で 1/12,000、緯度 30° で 1/4,200、緯度 50° で 1/2,700 より大縮尺ならば、大圏を直線で近似できる。また TABLE 2 は (58) の計算例であって、 $m=0.1$ メートル、 $\delta=0.2$ ミリメートルにとってある。

さきに述べたように, (57), (58) の限界条件は $\frac{m}{a}f \ll 1$ の場合に成り立つものである. $\frac{m}{a}f=1$ では展開式は急激に発散し, 近似はできない. たとえば, $m=1$ メートルに対して, $1/6,378,388$ より小縮尺の場合である. また $\frac{m}{a}f < 0.1$ ならば, (57), (58) は十分に成立する. たとえば $m=1$ メートルに対して $1/637,839$ より, また $m=0.1$ メートルに対して $1/6,378,388$ より大縮尺であればよい.

TABLE 1, TABLE 2 の表値は, これらに (m^2/m'^2) を乗ずることによって, 図上の任意の長さ m' に対する場合に容易に換算できる. たとえば $m'=0.5$ メートルに対しては, TABLE 1 の表値を 4 倍し, また TABLE 2 の表値を 0.04 倍すればよい. この場合, $\frac{m'}{a}f \ll 1$ の条件を考慮に入れなければならない.

(ii) 漸長方位線から方位大圏への修正

つぎに, (i) による近似のできない場合に, 測地線の真方位 T と地球表面上の実距離 S を与えて測地線の端点 Q を求めることを考える. 簡単のために, (11), (10) の第 1 項にそれぞれ (34), (46) を代入すると

$$\begin{aligned} \theta &= -\frac{1}{2a} \tan \varphi_0 \left(1 - \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi_0\right) \sin T \cdot S, \\ m-p &= \kappa s - \kappa d \\ &= \left[\frac{1}{24 f_s a^2} \tan^2 \varphi_0 \sec \varphi_0 \cos \varphi_s \sin^2 T \right. \\ &\quad - \frac{e^2}{16 f_s a^2} \tan^3 \varphi_0 \sin \varphi_0 \cos \varphi_s \sin^2 T \\ &\quad \left. + \frac{e^2}{48 f_s a^2} \tan^2 \varphi_0 \sec \varphi_0 \sin^2 \varphi_s \cos \varphi_s \sin^2 T \right] S^3. \end{aligned}$$

ここに θ はラジアン単位であるから, これを角度単位に改めるために常数 $G=57.^\circ 30$ を乗ずれば

$$\Theta = G\theta = AS \sin T, \quad (59)$$

$$A = -\frac{G}{2a} \tan \varphi_0 \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0}. \quad (60)$$

また $m-p$ も書き直して

$$m-p = BS^3 \sin^2 T / f_s, \quad (61)$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{24 a^2} \tan^2 \varphi_0 \sec \varphi_0 \cos \varphi_s \\ &\quad - \frac{e^2}{16 a^2} \tan^3 \varphi_0 \sin \varphi_0 \cos \varphi_s \\ &\quad + \frac{e^2}{48 a^2} \tan^2 \varphi_0 \sec \varphi_0 \sin^2 \varphi_s \cos \varphi_s. \end{aligned} \quad (62)$$

すなわち, 図上で測地線の起点 P から, 与えられた真方位 T に (59) で与えられる Θ を加えた方向に航程線 PQ を描き, その上で実距離 S に対応する $m=\kappa s$ から (62) による $m-p$ を減じた位置に点 Q をとれば, これが所要の測地線の端点である. この Θ は航海で用いる Givry の角と本来同一のものである. A および B の数値を TABLE 3, TABLE 4 に示す. これらの表は (59), (61) の S をキロメートル単位とするものであり, Θ は角度の度単位, $m-p$ はミリメートル単位で与えられる.

(iii) 測地線と航程線との間隔

つぎに2点 P, Q の位置を与えられたとして、海図上でこの2点を直線、すなわち航程線で結んだ場合、これとこの2点間の測地線との最大間隔について考える。

投影された測地線 PQ 上に点 R をとり、この投影された測地線に沿った PR の長さを s_1 とし、これと PQ の長さ s との比を α とする。すなわち

$$s_1 = s \alpha .$$

すると点 R から航程線 PQ へ下した垂線の長さ h は

$$h = \left(\frac{\sigma_0}{2} s^2 + \frac{\sigma_0'}{6} s^3 - \frac{\sigma_0''}{24} s^4 + \dots \right) \alpha - \frac{\sigma_0}{2} s^2 \alpha^2 - \frac{\sigma_0'}{6} s^3 \alpha^3 + \frac{\sigma_0''}{24} s^4 \alpha^4 + \dots \quad (63)$$

で表わされ、 $\alpha = \alpha_{max}$ で h が極大となるとすれば、

$$\frac{dh}{d\alpha} = 0 .$$

(63) から

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sigma_0'}{6\sigma_0} s + \dots$$

(34), (35) を使って

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{s}{6a} \frac{\cos T}{\sin \varphi_0} + \dots \quad (64)$$

$\varphi_0 = 10^\circ$ で第2項は $(s/a) \cos T$ となり、 $s = 640 \text{ km}$ とすれば、これは $1/10$ 以下、 $s = 64 \text{ km}$ で $1/100$ 以下となる。同様に $\varphi_0 = 25^\circ$ では、 $s = 1,620 \text{ km}$ で $1/10$ 以下、 $s = 162 \text{ km}$ で $1/100$ 以下となる。したがって、この範囲内ならば $\alpha = 1/2$ で h は極大と見なすことができる。この時の h の値は

$$h_{\frac{1}{2}} = \frac{s^2}{8} \sigma_0 + \frac{s^3}{16} \sigma_0' + \dots$$

で表わされる。(34), (35) から

$$\left| h_{\frac{1}{2}} \right| = \frac{s^2}{8a} \sin \varphi_0 \sin T + \frac{s^3}{16a^2} \sin T \cos T - \dots \quad (65)$$

s が 87 km より小ならば、第2項は ± 1 メートル以下となる。

これを、地球表面上の実距離で表わすために、 k で除し、かつ (6), (43), (44), (45) を使って s を S で表わせば

$$\begin{aligned} H_{\frac{1}{2}} &= \frac{S^2}{8a} \tan \varphi_0 \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0} \sin T \\ &+ \frac{S^3}{16a^2(1 - e^2)} \left\{ \sec^2 \varphi_0 + e^2 (\cos^2 \varphi_0 - \sec^2 \varphi_0) \right\} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0} \sin T \cos T \\ &+ \frac{S^4}{384a^3} (15 \tan^3 \varphi_0 \sin T \cos^2 T + 11 \tan \varphi_0 \sin T \cos^2 T - 7 \tan \varphi_0 \sin^3 T). \quad (66) \end{aligned}$$

あるいは、略算用として e の項を省略し、かつ a の数値を入ると

$$H_{\frac{1}{2}} = \frac{S^2}{0.51 \times 10^2} \tan \varphi_0 \sin T + \frac{S^3}{0.65 \times 10^6} \sec^2 \varphi_0 \sin T \cos T. \quad (67)$$

ここに S はキロメートル単位であり、 $H_{\frac{1}{2}}$ はメートル単位で求められる。TABLE 5 に $\varphi_0 = 25^\circ \sim 45^\circ$ について、(66) による $H_{\frac{1}{2}}$ の数値を掲げる。しかし、この値は、海図上で投影された測地線と直線との間隔がほぼ最大となる場合の値であって、厳密には、地球表面上における測地線と航程線との間隔の最大値ではないことを注

意しておく。

(編 曆 課)

参 考 文 献

Thomas, P. D. 1952, "Conformal Projections in Geodesy and Cartography",
C & G S Special Publ. No. 251, Washington, D.C.

TABLE 1. RECIPROCAL OF SCALE LIMIT, F_p .

$\varphi_0 \backslash \varphi_s$	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°
2°	73101	72823	71991	70610	68693	66252	63308	59881	55999	51690	46989	41929	36551
4	36573	36434	36017	35327	34367	33146	31673	29959	28017	25861	23509	20977	18286
6	24407	24314	24036	23575	22935	22120	21137	19993	18697	17258	15688	13999	12203
8	18331	18261	18053	17707	17226	16614	15875	15016	14042	12962	11783	10514	9166
10	14692	14636	14469	14191	13806	13315	12723	12035	11255	10389	9444	8427	7346
12	12271	12224	12084	11852	11531	11121	10627	10051	9400	8677	7887	7038	6135
14	10546	10505	10385	10186	9910	9558	9133	8638	8078	7457	6779	6049	5273
16	9256	9220	9115	8940	8697	8388	8016	7582	7090	6545	5949	5309	4628
18	8256	8224	8130	7975	7758	7482	7150	6763	6324	5838	5307	4735	4128
20	7459	7431	7346	7205	7009	6760	6460	6110	5714	5274	4795	4278	3730
22	6810	6784	6707	6578	6400	6172	5898	5579	5217	4816	4378	3906	3405
24	6272	6248	6177	6059	5894	5685	5432	5138	4805	4435	4032	3598	3136
26	5820	5798	5731	5621	5469	5274	5040	4767	4458	4115	3741	3338	2910
28	5434	5414	5352	5249	5106	4925	4706	4451	4163	3843	3493	3117	2717
30	5102	5083	5025	4929	4795	4624	4419	4180	3909	3608	3280	2927	2551
32	4814	4796	4741	4650	4524	4363	4169	3944	3688	3404	3095	2761	2407
34	4562	4545	4493	4407	4287	4135	3951	3737	3495	3226	2933	2617	2281
36	4340	4324	4274	4192	4079	3934	3759	3555	3325	3069	2790	2490	2170
38	4144	4128	4081	4003	3894	3756	3589	3394	3174	2930	2664	2377	2072
40	3969	3954	3909	3834	3730	3597	3437	3251	3040	2806	2551	2277	1984
42	3813	3798	3755	3683	3583	3455	3302	3123	2921	2696	2451	2187	1906
44	3673	3659	3617	3547	3451	3329	3181	3008	2813	2597	2361	2107	1836
46	3547	3533	3493	3426	3333	3214	3071	2905	2717	2508	2280	2034	1773
48	3433	3420	3381	3316	3226	3111	2973	2812	2630	2427	2207	1969	1716
50	3330	3318	3280	3217	3130	3018	2884	2728	2551	2355	2141	1910	1665
52	3238	3225	3188	3127	3042	2934	2804	2652	2480	2289	2081	1857	1619
54	3153	3141	3106	3046	2963	2858	2731	2583	2416	2230	2027	1809	1577
56	3077	3066	3031	2972	2892	2789	2665	2521	2357	2176	1978	1765	1539
58	3008	2997	2963	2906	2827	2726	2605	2464	2305	2127	1934	1726	1504
60	2946	2935	2901	2845	2768	2670	2551	2413	2257	2083	1894	1690	1473
62	2889	2878	2846	2791	2715	2619	2502	2367	2213	2043	1857	1657	1445
64	2838	2828	2795	2742	2667	2573	2458	2325	2174	2007	1825	1628	1419
66	2793	2782	2750	2697	2624	2531	2418	2288	2139	1975	1795	1602	1396
68	2752	2741	2710	2658	2586	2494	2383	2254	2108	1946	1769	1578	1376
70	2715	2705	2674	2622	2551	2461	2351	2224	2080	1920	1745	1557	1357

TABLE 2. RECIPROCAL OF SCALE LIMIT, \bar{F}_e ; UNIT 10^3 .

$\varphi_0 \backslash \varphi_s$	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°
0°											
2					759	545	406	310	240	187	146
4			880	556	380	273	203	155	120	94	73
6			588	371	253	182	136	103	80	63	49
8		792	441	279	190	137	102	78	60	47	37
10		635	354	223	153	110	82	62	48	38	29
12		530	295	187	127	92	68	52	40	31	25
14		456	254	160	109	79	59	45	35	27	21
16	906	400	223	141	96	69	51	39	30	24	18
18	808	357	199	126	86	62	46	35	27	21	16
20	730	322	180	113	77	56	41	32	24	19	15
22	667	294	164	104	71	51	38	29	22	17	14
24	614	271	151	95	65	47	35	27	21	16	13
26	570	251	140	89	60	43	32	25	19	15	12
28	532	235	131	83	56	41	30	23	18	14	11
30	499	220	123	78	53	38	28	22	17	13	10
32	471	208	116	73	50	36	27	20	16	12	10
34	447	197	110	69	47	34	25	19	15	12	9
36	425	188	104	66	45	32	24	18	14	11	9
38	406	179	100	63	43	31	23	18	14	11	8
40	388	172	96	60	41	30	22	17	13	10	8
42	373	165	92	58	40	28	21	16	13	10	8
44	359	159	88	56	38	27	20	16	12	9	7
46	347	153	85	54	37	26	20	15	12	9	7
48	336	148	83	52	36	26	19	15	11	9	7
50	326	144	80	51	35	25	19	14	11	9	7
52	317	140	78	49	34	24	18	14	11	8	6
54	308	136	76	48	33	24	18	13	10	8	6
56	301	133	74	47	32	23	17	13	10	8	6
58	294	130	72	46	31	22	17	13	10	8	6
60	288	127	71	45	31	22	16	12	10	8	6
62	283	125	70	44	30	22	16	12	9	7	6
64	278	123	68	43	29	21	16	12	9	7	6
66	273	121	67	42	29	21	16	12	9	7	6
68	269	119	66	42	29	21	15	12	9	7	6
70	266	117	65	41	28	20	15	12	9	7	5

TABLE 3. VALUE OF A.

φ_0	A
0°	0.00000
2	-0.00016
4	-0.00031
6	-0.00047
8	-0.00063
10	-0.00079
12	-0.00095
14	-0.00112
16	-0.00129
18	-0.00146
20	-0.00163
22	-0.00181
24	-0.00200
26	-0.00219
28	-0.00239
30	-0.00259
32	-0.00280
34	-0.00303
36	-0.00326
38	-0.00350
40	-0.00376
42	-0.00404
44	-0.00433
46	-0.00464
48	-0.00498
50	-0.00534
52	-0.00574
54	-0.00617
56	-0.00664
58	-0.00717
60	-0.00776
62	-0.00843
64	-0.00918
66	-0.01006
68	-0.01109
70	-0.01230

Note: S in kilometre
in eq. (59).

TABLE 4. VALUE OF B.

$\varphi_0 \backslash \varphi_s$	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°
0°	0.00 000	0.00 000	0.00 000	0.00 000	0.00 000	0.00 000	0.00 000	0.00 000	0.00 000	0.00 000	0.00 000	0.00 000	0.00 000
2	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
4	001	001	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
6	001	001	001	001	001	001	001	001	001	001	001	001	001
8	002	002	002	002	002	002	002	002	002	002	001	001	001
10	0.00 003	0.00 003	0.00 003	0.00 003	0.00 003	0.00 003	0.00 003	0.00 003	0.00 002	0.00 002	0.00 002	0.00 002	0.00 002
12	005	005	005	005	004	004	004	004	004	003	003	003	002
14	007	007	006	006	006	006	006	005	005	005	004	004	003
16	009	009	009	008	008	008	008	007	007	006	006	005	004
18	011	011	011	011	011	010	010	009	009	008	007	007	006
20	0.00 014	0.00 014	0.00 014	0.00 014	0.00 014	0.00 013	0.00 012	0.00 012	0.00 011	0.00 010	0.00 009	0.00 008	0.00 007
22	018	018	018	017	017	016	016	015	014	013	012	010	009
24	022	022	022	021	021	020	019	018	017	016	014	013	011
26	027	027	027	026	025	024	023	022	021	019	017	016	014
28	033	033	032	032	031	030	028	027	025	023	021	019	016
30	0.00 039	0.00 039	0.00 039	0.00 038	0.00 037	0.00 036	0.00 034	0.00 032	0.00 030	0.00 028	0.00 025	0.00 023	0.00 020
32	047	047	046	045	044	043	041	039	036	033	030	027	024
34	056	056	055	054	053	051	048	046	043	040	036	032	028
36	067	066	066	064	063	060	058	055	051	047	043	038	033
38	079	079	078	076	074	072	068	065	061	056	051	045	040
40	0.00 094	0.00 093	0.00 092	0.00 091	0.00 088	0.00 085	0.00 081	0.00 077	0.00 072	0.00 066	0.00 060	0.00 054	0.00 047
42	111	111	110	107	105	101	096	091	085	079	072	064	056
44	132	132	130	128	124	120	115	108	101	094	085	076	066
46	157	157	155	152	148	143	136	129	121	111	101	090	079
48	188	187	185	182	177	170	163	154	144	133	121	108	094
50	0.00 225	0.00 224	0.00 222	0.00 218	0.00 212	0.00 204	0.00 195	0.00 185	0.00 173	0.00 160	0.00 145	0.00 129	0.00 113
52	271	270	267	262	255	246	235	222	208	192	175	156	136
54	329	327	324	317	309	298	285	269	252	233	212	189	165
56	401	399	395	387	377	363	347	329	307	284	258	230	201
58	493	491	485	476	463	447	427	404	378	349	317	283	247
60	0.00 612	0.00 610	0.00 603	0.00 591	0.00 575	0.00 555	0.00 530	0.00 502	0.00 469	0.00 433	0.00 394	0.00 352	0.00 307
62	00 769	00 766	00 757	00 743	00 722	00 697	00 666	00 630	00 590	00 544	00 495	00 442	00 385
64	00 978	00 975	00 964	00 945	00 920	00 887	00 848	00 802	00 751	00 693	00 630	00 562	00 490
66	01 266	01 261	01 247	01 223	01 190	01 148	01 097	01 038	00 971	00 896	00 815	00 728	00 634
68	01 669	01 663	01 644	01 613	01 569	01 514	01 447	01 369	01 280	01 182	01 075	00 960	00 837
70	0.02 253	0.02 245	0.02 219	0.02 177	0.02 118	0.02 043	0.01 953	0.01 848	0.01 729	0.01 596	0.01 451	0.01 295	0.01 130

Note: S in kilometre and $m-p$ in millimetre in eq. (61).

TABLE 5. DISTANCE BETWEEN LOXODROME AND GEODESIC AT MID-POINT ON PROJECTED GEODESIC.

$\varphi_0 = 25^\circ$

$S \backslash T$		$\varphi_0 = 25^\circ$									
		0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
km	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
10	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
20	0	1	1	2	2	3	3	3	4	4	4
30	0	1	3	4	5	6	7	8	8	8	8
40	0	3	5	7	9	11	13	14	14	15	15
50	0	4	8	12	15	18	20	22	23	23	23
60	0	6	11	17	21	25	29	31	32	33	33
70	0	8	16	23	29	35	39	42	44	45	45
80	0	10	20	30	38	45	51	55	58	58	58
90	0	13	26	38	48	57	65	70	73	74	74
100	0	16	32	46	60	71	80	86	90	91	91
150	0	37	72	106	135	161	181	195	203	205	205
200	0	66	130	189	242	287	323	348	362	365	365
250	0	104	205	298	381	452	507	546	567	571	571
300	0	151	298	433	553	655	734	789	818	822	822
350	0	208	409	595	759	897	1004	1077	1115	1118	1118
400	0	275	539	783	999	1179	1317	1411	1459	1460	1460

$\varphi_0 = 30^\circ$

$S \backslash T$		$\varphi_0 = 30^\circ$									
		0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
km	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
10	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
20	0	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5
30	0	2	3	5	7	8	9	10	10	10	10
40	0	3	6	9	12	14	16	17	18	18	18
50	0	5	10	14	18	22	25	27	28	28	28
60	0	7	14	21	26	31	35	38	40	41	41
70	0	10	19	28	36	43	48	52	55	55	55
80	0	13	25	37	47	56	63	68	71	72	72
90	0	16	32	46	60	71	80	87	90	92	92
100	0	20	39	57	74	88	99	107	112	113	113
150	0	45	89	130	167	198	223	241	252	254	254
200	0	81	160	233	299	355	399	430	448	452	452
250	0	128	252	367	470	557	626	674	701	706	706
300	0	186	366	533	682	807	905	974	1011	1017	1017
350	0	256	502	731	934	1104	1237	1329	1378	1384	1384
400	0	337	662	962	1228	1451	1623	1741	1803	1808	1808

$\varphi_0 = 35^\circ$

$S \backslash T$		$\varphi_0 = 35^\circ$									
		0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
km	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
10	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
20	0	1	2	3	4	4	5	5	5	5	5
30	0	2	4	6	8	9	11	12	12	12	12
40	0	4	8	11	14	17	19	21	22	22	22
50	0	6	12	17	22	26	30	32	34	34	34
60	0	9	17	25	32	38	43	47	49	49	49
70	0	12	23	34	44	52	59	63	66	67	67
80	0	15	30	44	57	68	76	83	87	88	88
90	0	20	39	56	72	86	97	105	110	111	111
100	0	24	48	70	89	106	120	130	135	137	137
150	0	55	108	158	202	240	270	292	305	308	308
200	0	98	193	282	362	429	483	521	543	548	548
250	0	155	305	444	568	674	757	816	850	857	857
300	0	225	442	644	824	976	1095	1179	1225	1233	1233
350	0	309	606	883	1128	1335	1497	1609	1670	1678	1678
400	0	406	798	1161	1483	1753	1963	2107	2184	2192	2192

$\varphi_0 = 40^\circ$

$S \backslash T$		$\varphi_0 = 40^\circ$									
		0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
km	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
10	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2
20	0	1	2	3	4	5	6	7	7	8	8
30	0	3	5	7	10	11	13	14	15	15	15
40	0	5	9	13	17	20	23	25	26	26	26
50	0	7	14	21	27	32	36	39	40	41	41
60	0	10	20	30	38	46	51	56	58	59	59
70	0	14	28	41	52	62	70	76	79	80	80
80	0	18	36	53	68	81	92	99	104	105	105
90	0	23	46	67	86	103	116	126	131	133	133
100	0	29	57	83	107	127	143	155	162	164	164
150	0	66	129	189	242	287	324	350	365	369	369
200	0	118	231	338	433	514	578	624	650	657	657
250	0	185	364	531	680	807	907	977	1018	1026	1026
300	0	269	529	770	985	1167	1311	1411	1467	1477	1477
350	0	369	725	1055	1349	1597	1791	1926	2000	2011	2011
400	0	486	954	1388	1773	2096	2348	2522	2615	2626	2626

$\varphi_0 = 45^\circ$

$S \backslash T$		$\varphi_0 = 45^\circ$									
		0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
km	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
10	0	0	1	1	1	2	2	2	2	2	2
20	0	1	3	4	5	6	7	7	8	8	8
30	0	3	6	9	11	14	15	17	17	18	18
40	0	5	11	16	20	24	27	29	31	31	31
50	0	9	17	25	32	38	43	46	48	49	49
60	0	12	24	36	46	54	61	66	69	70	70
70	0	17	33	48	62	74	83	90	95	96	96
80	0	22	43	63	81	97	109	118	124	125	125
90	0	28	55	80	103	123	138	150	156	158	158
100	0	35	68	99	127	151	171	185	193	196	196
150	0	78	154	225	288	342	386	417	435	440	440
200	0	140	276	402	515	612	688	743	775	782	782
250	0	221	434	633	810	961	1080	1164	1212	1223	1223
300	0	320	630	917	1173	1390	1561	1681	1748	1760	1760
350	0	439	863	1257	1607	1902	2133	2294	2382	2396	2396
400	0	578	1136	1653	2111	2496	2796	3004	3115	3129	3129