総　　説

海洋情報部研究報告 第 62 号 令和 6 年 3 月 15 日
REPORT OF HYDROGRAPHIC AND OCEANOGRAPHIC RESEARCHES No.62 March, 2024

海洋音響における散乱問題の基礎的な定式化に関するレビュー†

長澤亮佑*，堀之内龍一*

A review on the fundamental formulation for the scattering problem of underwater acoustics†

Ryosuke NAGASAWA* and Ryoichi HORINOUCHI*

Abstract

As an elementary approach to scattering problems in ocean acoustics, the fundamental formulations for obtaining some expressions of the scattered field are reviewed. Beginning with an overview of the solutions to the Helmholtz equation, the scattering of plane waves incident on an infinite circular cylinder and the scattering of spherical waves incident on a rectangular surface will be discussed. For both scattering problems, the spatial distribution of the scattered intensity was found to vary depending on the ratio between the scale of the scatterer, such as the diameter of the cylinder or the size of the rectangle, and the scale of the sound field, such as the observed wavelength. Although the results presented in this report are approximate solutions under a simplified problem setup, the formulations provide important suggestions for applications to real-world scattering problems, such as those characterized by keywords characterized as the Rayleigh/geometric scatterings and the Fraunhofer/Fresnel regions.

1　はじめに

音響測深や音波探査をはじめとする海洋音響観測は，海中に発せられた音波のはね返りを受信して解析することで，海面下にあるさまざまな障害物の様相を明らかにする．海中では媒質の物理特性の変化に応じて音波が散乱し，発生した散乱波のうちある成分が受信機の方向へと伝播する．ここで散乱波の強度がもつ空間分布・時間分布は，入射波の特性や媒質，そして散乱を生じる物体の特性によって決まる．系を正しくモデル化することができれば，観測量をもとに海洋中の散乱体を明らかにすることも原理的には可能である．例えば，音響測深機のエコーグラムに記録された後方散乱強度から，海洋中の微細構造を特徴づける密度や音速からなる量の推定を行うことも考えられる．

本稿は，そのような海洋における散乱のモデル化を行う上で基礎となる知識をまとめるべく，波動音響理論に基づき，音波の散乱についての初歩的な事項をまとめるものである．主として Morse and Ingard（1968）及び Medwin and Clay（1998）に範を取った式展開を行い，いくつかの単純な散乱問題について散乱音場をモデル化する．本稿の構成として，まず第 2 章では，音波の伝播を考える上で基礎となる Helmholtz 方程式について触れ，その解たる音圧の表現方法としていくつかの

† Received August 23, 2023; Accepted October 20, 2023
＊　大洋調査課　Offshore Surveys Division

例を導く．続く第 3 章では散乱の問題を考え，無限剛体円柱まわりの散乱についての表現と，平面まわりの散乱に関する表現を導く．

2　音波の伝播についての表現

2.1 Helmholtz 方程式

海中の音速分布を $c \equiv c(\boldsymbol{r})$ とおく．海中を伝播する音波の音圧 $p \equiv p(\boldsymbol{r},t)$ は，次のような波動方程式に従う．

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)p = 0 \tag{2.1}$$

また，速度ポテンシャル $\Phi\ (\boldsymbol{r},t)$ を導入し，粒子速度 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)$ が $\boldsymbol{u} = -\nabla\Phi$ で表されるとする．音圧と速度ポテンシャルの間には，密度 ρ を介して

$$p = \rho\frac{\partial}{\partial t}\Phi \tag{2.2}$$

の関係式が成り立つ．

いま，音圧と速度ポテンシャルの時間依存性を調和振動 $e^{-i\omega t}$（ω は角振動数）の形で変数分離できるとすれば，音圧についての波動方程式は次の Helmholtz 方程式の形をとる．

$$(\nabla^2 + k^2)p = 0 \tag{2.3}$$

ここで波数 $k \equiv 2\pi/\lambda = \omega/c$ を用いた（λ は波長）．またこのとき，速度ポテンシャルと音圧の関係を用いて音圧と粒子速度の間に次の関係式が導かれる．

$$\nabla p = -i\rho\omega\nabla\Phi = i\rho ck\boldsymbol{u} \tag{2.4}$$

Laplace 演算子 ∇^2 は，球面座標系 (r, θ, φ) では

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \tag{2.5}$$

と表現される．また，海中での音波の伝播を表現する際には距離 r，深度 z，方位角 θ を変数とする円筒座標系が用いられる場合が多いが，この場合には次のような表式をとる．

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{2.6}$$

本稿の主題は，Helmholtz 方程式の解たる音圧に適当な近似や境界条件を課し，それぞれの仮定する状況に応じた具体的な音波の伝播式を見ていくことにある．本章ではまず，いくつかの単純なケースについて Helmholtz 方程式の解の表式を得ることにする．

なお，ある点における音圧 p と粒子速度 u の比は音響インピーダンス密度 $(z \equiv p/u)$ と呼ばれる．平面波の場合を考え，p の空間依存性が 2 次元極座標系において e^{ikr} と表されるとすると，

$$z = \frac{p}{\nabla_r p/i\rho ck} = \frac{p}{ikp/i\rho ck} = \rho c \tag{2.7}$$

と求まる．これは特性音響インピーダンスと呼ばれ，等方的な媒質中を伝播する平面波の議論において広く用いられる量である．

2.2 Bessel 関数による平面波の表現

円筒座標系，または 2 次元極座標系における Helmholtz 方程式を考える．解が $p(r,\theta) = R(r)\,\Theta(\theta)$ と変数分離できるものとし，分離定数を m^2，変数を $z=kr$ と置くと，動径方向の方程式は次のような Bessel の微分方程式の形になる．

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{d}{dz} + 1 - \frac{m^2}{z^2}\right)R(z) = 0 \tag{2.8}$$

これを満たす特殊解に Bessel 関数（第 1 種 Bessel 関数）及び Neumann 関数（第 2 種 Bessel 関数）があり（具体的な形は付録 A を参照），一般解は両者の線形結合として表現されることが知られている．

さて，円筒座標系における単色平面波の伝播を考える．音圧 $p(\boldsymbol{r},t)$ の空間成分として波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ と位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ からなる $e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ の形を仮定すると，これは Helmholtz 方程式を満たす．いま，$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = kr\cos\varphi$ となるように角度 φ を導入し，音圧のスケーリングのため定数 P_0 を導入して $p = P_0\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\, e^{-i\omega t} = P_0\, e^{ikr\cos\varphi}\, e^{-i\omega t}$ と書けるとする．このとき，音圧 $p(r,\varphi,t)$ は Bessel 関数 J_m を用いて，次のような無限級数の形で表現される（Morse and Ingard, 1968, 1.2.9 式，導出については本稿付録 B を参照）．

$$p = P_0 e^{-i\omega t}\left(J_0(kr) + 2\sum_{m=1}^{\infty} i^m \cos(m\phi) J_m(kr)\right) \tag{2.9}$$

また，音圧と粒子速度の関係式（2.4）から，粒子速度の動径方向成分 u_r は次の計算で求められる．

$$u_r = \frac{1}{i\rho c k}\frac{\partial}{\partial r} p \tag{2.10}$$

Bessel 関数の次数の符号反転に関する性質（付録 A, A.10 式）と微分に関する漸化式（付録 A, A.15 式）を用いて計算すると，次が得られる．

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{P_0 e^{-i\omega t}}{i\rho c k}\left(\frac{d}{dr}J_0(kr) + 2\sum_{m=1}^{\infty} i^m \cos(m\phi)\frac{d}{dr}J_m(kr)\right) \\ &= \frac{P_0 e^{-i\omega t}}{\rho c}\left(iJ_1(kr) + \sum_{m=1}^{\infty} i^{m+1}\cos(m\phi)\left[J_{m+1}(kr) - J_{m-1}(kr)\right]\right) \end{aligned} \tag{2.11}$$

ここで得られた音圧と粒子速度を用い，3.1 節では，剛体円柱面に平面波が入射する場合の散乱について扱う．

2.3 球 Bessel 関数による平面波の表現

3 次元球面座標系における Helmholtz 方程式を考える．解が $p=R(r)Y(\theta,\varphi)$ と変数分離できるものとし，分離定数を $m(m+1)$，変数を $z=kr$ と置き換えると，動径方向の方程式は次のような球 Bessel 微分方程式の形になる．

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{2}{z}\frac{\partial}{\partial z} + 1 - \frac{m(m+1)}{z^2}\right)R(z) = 0 \tag{2.12}$$

これを満たす特殊解に球 Bessel 関数（第 1 種球 Bessel 関数）及び球 Neumann 関数（第 2 種球 Bessel 関数）がある．証明は省くが，球面座標系における単色平面波の伝播は，球 Bessel 関数 j_m と Legendre 多項式 P_m を用いて，円筒座標系の場合と類似の表式をとることが知られている（Morse and Ingard, 1968, 8.2.1 式）．

$$p = P_0 e^{-i\omega t}\sum_{m=0}^{\infty}(2m+1) j_m(kr) i^m P_m(\cos\psi) \tag{2.13}$$

2.4 積分方程式による表現

音圧 $p(\boldsymbol{r},t)=\psi(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}$ について，Green 関数を用いた表式を考える．場に音源があり，Green 関数として球面波 e^{ikr}/r を適用するとき，付録 C の議論により，音源の外部にある点 $\boldsymbol{r}$ における音圧は次のように得られる（Helmholtz-Kirchhoff の積分式．Medwin and Clay, 1998, 7.2.17 式）．

$$p = \frac{1}{4\pi}\int_S\left(p\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) - \frac{e^{ikr}}{r}\frac{\partial p}{\partial n}\right)dS \tag{2.14}$$

ここで，S は音源（散乱体を含む）を取り囲む閉曲面を表す．この積分方程式を解いて任意の点における p を求めるには，面 S 上の音圧と音圧勾配を得る必要がある．ところがこれは一般に容易ではないため，問題に応じて適当な近似解法が用いられる．

一例として，閉曲面 S における音波のはね返りが局所的に鏡面反射のように近似できる場合，すなわち無限平面に入射する平面波の振る舞いと同一視できるような場合においては，境界面上での入射音圧を p_i，散乱音圧を p，反射係数を Γ と置いて面 S 上で次の単純な関係式を仮定できる．

$$p = \Gamma p_i, \qquad \frac{\partial p}{\partial n} = -\Gamma\frac{\partial p_i}{\partial n} \tag{2.15}$$

これらを (2.14) 式に代入すれば，面 S の外部における散乱音場が次のように表される．

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{4\pi}\int_S\left(\Gamma p_i\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) + \Gamma\frac{e^{ikr}}{r}\frac{\partial p_i}{\partial n}\right)dS \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_S \Gamma\frac{\partial}{\partial n}\left(p_i\frac{e^{ikr}}{r}\right)dS \end{aligned} \tag{2.16}$$

さらに，反射係数が面 S 上で一定と見なせるような場合であれば，Γ を積分の外に出して

$$p = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_S\frac{\partial}{\partial n}\left(p_i\frac{e^{ikr}}{r}\right)dS \tag{2.17}$$

と単純化される．このような近似は Kirchhoff 近似と呼ばれる（Medwin and Clay, 1998）．

2.5 Eikonal 近似と音線による表現

音波の伝播を論じる上で，伝播経路を線で表した「音線」による近似的な表現が用いられることも多い．本稿の主題からやや逸れる内容ではあるが，本節で簡単に触れておく．

まず，Helmholtz 方程式の解として，ある基準音速 c_0 における波数 $k_0 \equiv \omega/c_0$ を用いた次の形を

考える．

$$p(\boldsymbol{r}) = A(\boldsymbol{r})e^{ik_0\phi(r)} \tag{2.18}$$

このとき，Helmholtz 方程式は

$$(\nabla^2 + k^2)p = 0$$
$$\Leftrightarrow A\nabla^2 e^{ik_0\phi} + 2\nabla A\cdot\nabla e^{ik_0\phi} + e^{ik_0\phi}\nabla^2 A + k^2 A e^{ik_0\phi} = 0$$
$$\Leftrightarrow ik_0 A\nabla^2\phi - k_0^2 A(\nabla\phi)^2 + 2ik_0\nabla A\cdot\nabla\phi + \nabla^2 A + k^2 A = 0 \tag{2.19}$$

となる（海洋音響学会，2004，8.4 式）．ここで高周波の場合の近似，すなわち $k_0, k \to \infty$ を適用すると，上式は

$$(\nabla k_0\phi)^2 = k^2 \tag{2.20}$$

となる．これは Eikonal 方程式と呼ばれる．

もとの波動解の波面，すなわち等位相面 $k_0\varphi(\boldsymbol{r}) = \text{const.}$ を考えると，波面上では位相の勾配と波面に沿った微小変位 $\boldsymbol{\delta\tau}$ との内積が

$$\nabla(k_0\phi)\cdot\delta\boldsymbol{\tau} = \delta(k_0\phi) = 0 \tag{2.21}$$

となる．そのため，$\nabla(k_0\varphi)$ は波面と直交する．ここで，波面と直交するような経路が線素 dl で構成されていると考える．波数 k を線素 dl に沿ったベクトル $\boldsymbol{k}$ で表すこととし，位相 $k_0\varphi$ について線素 dl に沿った微分をとると次のようになる．

$$\frac{d}{dl}k_0\phi = \nabla(k_0\phi)\cdot\frac{d}{dl}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{k}\cdot\frac{\boldsymbol{k}}{k} = \frac{\omega}{c} \tag{2.22}$$

よって，波面の法線，すなわち線素 dl をつないだ線として音線を定義すると，音波の位相は，音線に沿った線積分によって得られることがわかる．

$$k_0\phi(s_2) - k_0\phi(s_1) = \int_{l\in[s_1,s_2]}\frac{\omega}{c}\mathrm{d}l \tag{2.23}$$

波動解について高周波の極限をとったこの近似は Eikonal 近似と呼ばれる．音波の伝播を考える上で波動関数を持ち出す必要がなく，音速場さえ与えられれば幾何学的に伝播の経路を求めることができるため簡便である．回折や散乱音圧の強度分布といった波動論的な対象を定量的に評価する議論には適用できないが，それらが無視できる場合においてはきわめて実用的な近似である．

3　初歩的な散乱問題

本章では，2 つの初歩的な散乱問題について扱う．まず 3.1 節では，Morse and Ingard (1968) 8.1 節の議論に倣い，本稿 2.2 節の結果を用いて，無限の長さを持つ剛体円柱に平面波が入射する場合の散乱を考える．続く 3.2 節では，Medwin and Clay (1998) 7.2 節及び 7.3 節の議論に倣い，本稿 2.4 節の結果を用いて，矩形領域で定義された面上に球面波が入射する場合の散乱を考える．

3.1　平面波による剛体円柱まわりの散乱

3.1.1　問題設定

いま，3 次元空間に半径 a の太さをもつ剛体円柱があるとし，円柱面まわりの散乱について考える．簡単のため円柱の長さは無限大とし，円柱に直交する 2 次元平面 (r, φ) 上での音波の振る舞いを見ることにする．この平面上では円柱の外周は円 $r=a$ として表現される．この系の模式図を Fig. 1 に示す．また，音波の伝播にあたって媒質による損失は無視できるものとする．

3.1.2　入射波と散乱波

円柱が存在しない場合には，空間を伝播する単

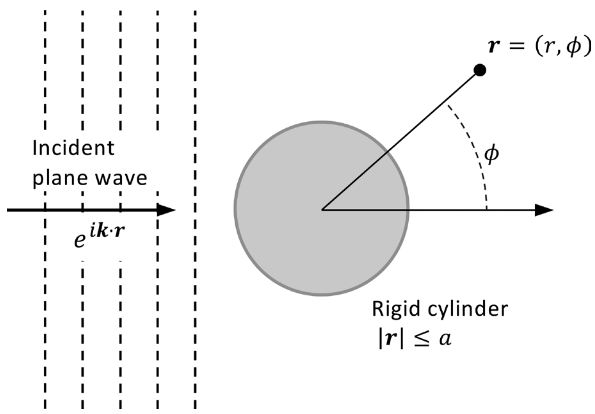

Fig. 1. Schematic for the problem of Section 3.1, the modeling of the scattered field around an infinite cylinder by an incident plane wave. The 2-D plane (r, θ) transects the infinite rigid cylinder with radius a. The circle represents the cross-section of the cylinder. The incident plane wave $e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ travels towards the right of the figure.

図 1.　3.1 節の散乱問題における系の模式図．半径 a の無限剛体円柱を横切る 2 次元平面上に視点を取っている．図中の円は円柱の断面を表す．円柱に入射する平面波 $e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ は図中右方へ進行している．

色平面波の音圧 p_i と動径方向の粒子速度 u_{ir} は 2.2 節に倣って次のように表される.

$$p_i = P_0 e^{-i\omega t}\left(J_0(kr) + 2\sum_{\mathrm{m}=1}^{\infty} i^m \cos(m\phi) J_m(kr)\right) \quad (3.1)$$

$$u_{ir} = \frac{P_0 e^{-i\omega t}}{\rho c}\left(iJ_1(kr) + \sum_{\mathrm{m}=1}^{\infty} i^{m+1}\cos(m\phi)\left[J_{m+1}(kr) - J_{m-1}(kr)\right]\right) \quad (3.2)$$

円柱が存在すると，この平面波に加えて散乱波が生じることになる．散乱波の音圧 p_s を 2 次元極座標系における一般的な進行波の形で仮定するべく，Morse and Ingard（1968）8.1 節に倣って，天下り的に次のように与える.

$$p_s = P_0 e^{-i\omega t}\sum_{\mathrm{m}=0}^{\infty} A_m \cos(m\phi)\, H_m^{(1)}(kr) \quad (3.3)$$

ここで，$H_m^{(1)}$ は第 1 種 Hankel 関数 $H_m^{(1)} \equiv J_m + iN_m$，$A_m$ は未知係数である．この式は，平面波を Bessel 関数による級数展開で表した 2.9 式の類推とも言えるものであり，また Bessel の微分方程式の解の基本形が Bessel 関数と Neumann 関数の線形結合で表現されることとも対応した表現となっている. この散乱波の粒子速度の動径方向（円柱面法線方向）成分 u_{sr} は，2.2 節の議論及び Hankel 関数の次数の符号反転と微分についての性質（付録 A）を用いて, 次のように求められる.

$$\begin{aligned}
u_{sr} &= \frac{1}{i\rho ck}\frac{d}{dr}p_s \\
&= \frac{P_0 e^{-i\omega t}}{i\rho ck}\sum_{\mathrm{m}=0}^{\infty} A_m \cos(m\phi)\frac{d}{dr}H_m^{(1)}(kr) \\
&= \frac{P_0 e^{-i\omega t}}{\rho c}\left(iA_0 H_1^{(1)}(kr) + \frac{i}{2}\sum_{\mathrm{m}=1}^{\infty} A_m \cos m\phi\left[H_{m+1}^{(1)}(kr) - H_{m-1}^{(1)}(kr)\right]\right)
\end{aligned} \quad (3.4)$$

3.1.3　境界条件の適用

ここで，入射波と散乱波をつなぐ境界条件として，円柱の表面 $|\boldsymbol{r}|=a$ において入射波と散乱波それぞれの法線方向の粒子速度の和が 0，すなわち

$$u_{ir} + u_{sr} = 0 \quad \text{at } |\boldsymbol{r}| = a \quad (3.5)$$

が成り立つとする（Morse and Ingard, 1968）．そして u_{ir} と u_{sr} の各項で和が 0 になるとすると，A_m を解くことができ，次のように求まる.

$$A_0 = -\frac{J_1(ka)}{H_1^{(1)}(ka)}, \quad (3.6)$$

$$A_m = -2i^m \frac{J_{m+1}(ka) - J_{m-1}(ka)}{H_{m+1}^{(1)}(ka) - H_{m-1}^{(1)}(ka)} \quad (m \in \mathbb{N}) \quad (3.7)$$

3.1.4　解の変形

Morse and Ingard (1968) に倣い，複素数値関数である解 A_m を振幅成分と位相成分に分けた形で表現する．まず，γ_m を次のように定義する.

$$\sin\gamma_m \equiv -\frac{J_{m+1} - J_{m-1}}{\left|H_{m+1}^{(1)} - H_{m-1}^{(1)}\right|} \quad (3.8)$$

$$\cos\gamma_m \equiv \frac{N_{m+1} - N_{m-1}}{\left|H_{m+1}^{(1)} - H_{m-1}^{(1)}\right|} \quad (3.9)$$

これらを用いれば，A_m に現れる Bessel 関数と第 1 種 Hankel 関数の商は次のように単純化される.

$$\frac{J_{m+1} - J_{m-1}}{H_{m+1}^{(1)} - H_{m-1}^{(1)}} = -\sin\gamma_m\left(\frac{H_{m+1}^{(1)} - H_{m-1}^{(1)}}{\left|H_{m+1}^{(1)} - H_{m-1}^{(1)}\right|}\right)^{-1} \quad (3.10)$$

$$\frac{H_{m+1}^{(1)} - H_{m-1}^{(1)}}{\left|H_{m+1}^{(1)} - H_{m-1}^{(1)}\right|} = -\sin\gamma_m + i\cos\gamma_m = ie^{i\gamma_m} \quad (3.11)$$

よって，A_m は

$$\begin{aligned}
A_m &= -2i^m \frac{J_{m+1} - J_{m-1}}{H_{m+1}^{(1)} - H_{m-1}^{(1)}} \\
&= -2i^{m+1}\sin\gamma_m\, e^{-i\gamma_m}
\end{aligned} \quad (3.12)$$

となる．さらに，$\epsilon_0 \equiv 1, \epsilon_m \equiv 2$ $(m \in \mathbb{N})$ なる ϵ_m を用いれば，A_m は $m=0$ の場合も含めて次のような単純な表式となる（Morse and Ingard, 1968, 8.1.2 式）.

$$A_m = -\epsilon_m i^{m+1}\sin\gamma_m\, e^{-i\gamma_m} \quad (3.13)$$

以上の議論から，散乱音圧 p_s は次のように求められた.

$$p_s(r,\phi,t) = P_0 e^{-i\omega t}\sum_{\mathrm{m}=0}^{\infty} -\epsilon_m i^{m+1}\sin\gamma_m\, e^{-i\gamma_m}\cos(m\phi)\, H_m^{(1)}(kr) \quad (3.14)$$

$$\epsilon_0 = 1, \epsilon_{m\neq 0} = 2$$

$$\gamma_m = \tan^{-1}\left(-\frac{J_{m+1}(ka) - J_{m-1}(ka)}{N_{m+1}(ka) - N_{m-1}(ka)}\right)$$

3.1.5　散乱音圧の漸近形

上で求めた散乱音圧 p_s の空間分布を具体的に調べるべく，簡単のため遠距離領域における p_s の漸近形を求めることにする．kr が十分に大き

い場合を仮定し，第 1 種 Hankel 関数の漸近形

$$H_m^{(1)}(z) \approx \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\left(z-\frac{m\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$$
$$= \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} (-i)^m e^{i\left(z-\frac{\pi}{4}\right)} \tag{3.15}$$

を用いることにすると，遠距離音場における散乱成分の音圧と粒子速度は次のように表される．

$$p_s \approx \left(\frac{2a}{\pi r}\right)^{\frac{1}{2}} P_0 e^{i\left(kr-\omega t-\frac{\pi}{4}\right)} \psi_s(\phi) \tag{3.16}$$

$$u_{sr} \approx \frac{1}{\rho c} p_s \tag{3.17}$$

$$\psi_s(\phi) \equiv \frac{1}{\sqrt{ka}} \sum_{m=0}^{\infty} -\epsilon_m \sin\gamma_m \, e^{-i\gamma_m} \cos(m\phi)$$

これらを用いて散乱成分の複素音響インテンシティ $I_s \equiv \overline{p_s}\, u_{sr}/2$ を計算すれば，

$$I_s \approx \frac{P_0^2 a}{\pi \rho c r} |\psi_s(\phi)|^2 \quad (kr \gg 1) \tag{3.18}$$

$$|\psi_s(\phi)|^2 = \frac{1}{ka} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_m \epsilon_n \sin\gamma_m \sin\gamma_n \cos(\gamma_m - \gamma_n) \cos m\phi \cos n\phi$$

と求まる（Morse and Ingard, 1968, 8.1.3 式）．

3.1.6 インテンシティの角度依存性

インテンシティの角度依存成分 $|\psi_s(\varphi)|^2$ の形状を観察する．ここで，$|\psi_s(\varphi)|^2$ を正規化して最大振幅を 1 とし，異なる ka のもとでプロットした結果を Fig. 2 に示す．ka の大小，すなわち円柱の半径と音波の波長の大小関係によって，分布の形が変化する．いずれの図も左側（$\varphi = \pi$）から平面波が入射しており，ka が小さい（対象物のサイズに対して波長が長い）ときには後方（$\varphi = \pi$）への散乱成分が多く含まれる一方，ka が増加するにつれ前方（$\varphi = 0$）へ向かう成分の割合が多くなっていくことが読み取れる．

ここで, 音源として音響測深機を用いた場合の，剛体円柱の半径 a の典型的な値の範囲について求めてみる．まず，入射波の周波数として，音響測深機に一般的に採用されている ～10 － 100 kHz オーダの帯域を想定する．発振周波数がそれぞれ 12 kHz，90 kHz，400 kHz であるような 3 種類の機器について考えることとし，音速を 1500 m/s と仮定すれば，波長 λ はそれぞれ 125.0 mm，16.7 mm，3.75 mm と求まる．対象物のサイズが十分に小さい，または大きいと見なせる状態として，$ka = 0.4$ 及び $ka = 9$ の 2 つの状態について考えることにし，対応する a の値を求めることにする．a と λ の関係性から，それぞれ次のように求まる．

$$a = \begin{cases} 8.0\ \mathrm{mm} & (12\ \mathrm{kHz}) \\ 1.1\ \mathrm{mm} & (90\ \mathrm{kHz}) \\ 0.2\ \mathrm{mm} & (400\ \mathrm{kHz}) \end{cases} \quad \mathrm{s.t.}\ ka = 0.4$$

$$a = \begin{cases} 179.0\ \mathrm{mm} & (12\ \mathrm{kHz}) \\ 23.9\ \mathrm{mm} & (90\ \mathrm{kHz}) \\ 5.4\ \mathrm{mm} & (400\ \mathrm{kHz}) \end{cases} \quad \mathrm{s.t.}\ ka = 9$$

3.1.7 後方散乱におけるインテンシティの周波数依存性（Rayleigh 散乱と幾何散乱）

次に，$\varphi = \pi$，つまり後方への散乱強度に関する波長依存性を調べる．$|\psi_s(\pi)|^2$ を正規化せずにプロットした結果を Fig. 3 に示す．ka が十分小さい（対象物のサイズに対して波長が長い）ときには両対数グラフ内で線形，すなわち冪乗則に従った推移を見せることがわかる．一方，ka が大きくなるにつれて $|\psi_s(\pi)|^2$ の増大は頭打ちとなり，$ka \sim 1$ においては振動するような挙動を示した後，$ka \sim 10$ を越える頃にはほぼ一定値に漸近していく．ka が十分小さい場合の散乱は一般に Rayleigh 散乱と呼ばれ，反対に ka が十分大きい場合は幾何散乱と呼ばれる（Medwin and Clay, 1998）．Rayleigh 散乱領域では散乱波のインテンシティは著しい周波数依存性を示す．そのため，観測波長よりもきわめて小さいスケールをもつ対象の観測は非常に困難となる．

3.1.6 の議論と同様，音速を 1500 m/s とし，発振周波数 12 kHz，90 kHz，400 kHz の音響測深機を用いる場合を仮定して，Rayleigh 散乱と幾何散乱に対応する典型的なスケールを考えることにする．$ka \sim 0.1$ 及び $ka \sim 10$ を満たすような a を求めると，それぞれ次のようになる．

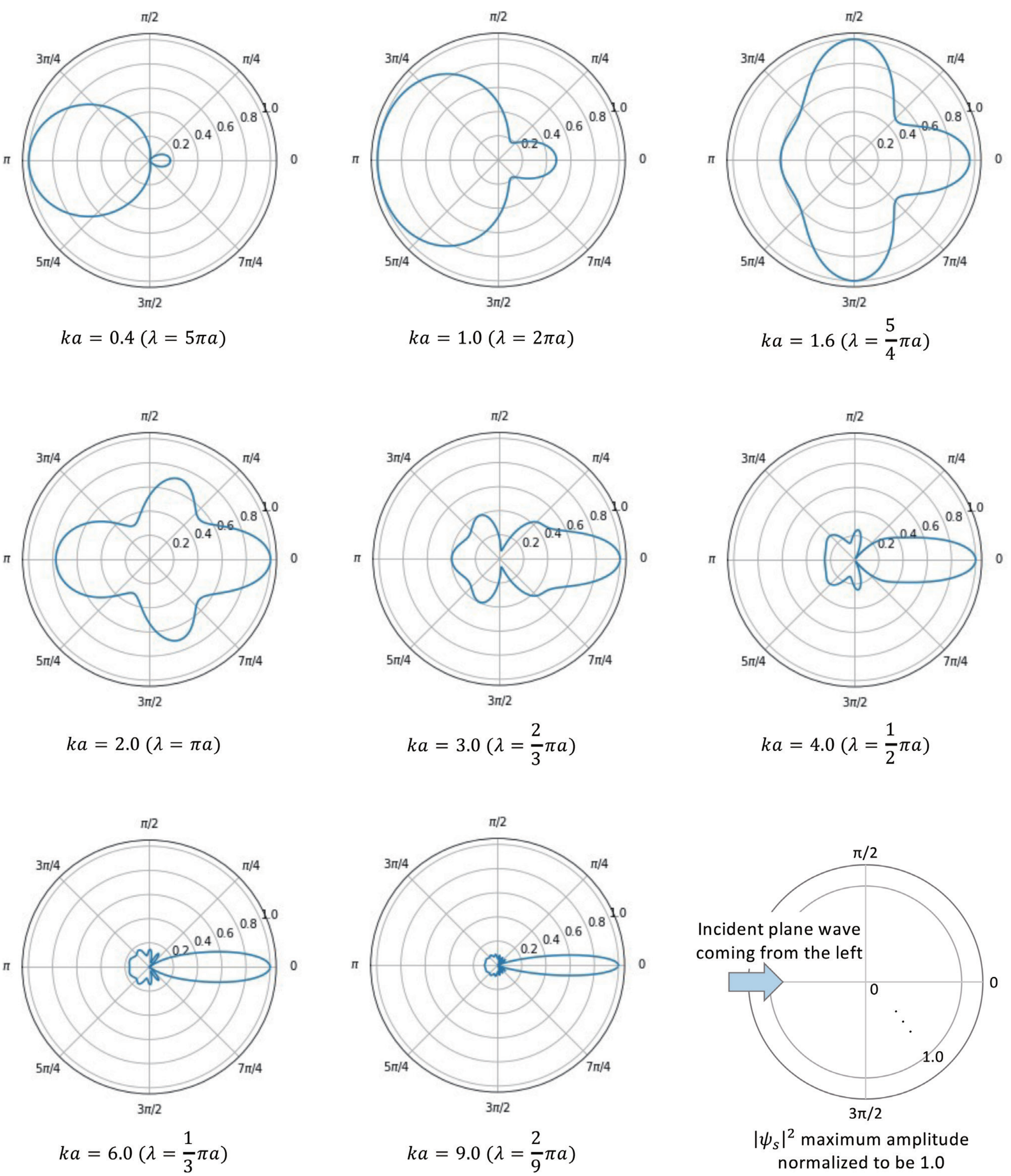

Fig. 2. Angular distribution of the scattered field intensity around the rigid cylinder by incident plane wave for different *ka* (ratio of the cylinder circumference to the wavelength). Note that the intensity is normalized so that the maximum value is 1. The $\varphi=0$ is oriented in the direction to the incident wave travels.

図 2.　平面波による剛体円柱面まわりの散乱場について，インテンシティの角度分布を表した図．最大値が 1 となるよう正規化している．また，$\varphi=0$ が入射波の進行方向を向くように角度をとっている．

$$a \sim \begin{cases} 1-10\ \mathrm{mm} & (12\ \mathrm{kHz}) \\ 0.1-1\ \mathrm{mm} & (90\ \mathrm{kHz}) \quad \mathrm{s.t.}\ ka \sim 0.1 \\ 0.1\ \mathrm{mm} & (400\ \mathrm{kHz}) \end{cases}$$

$$a \sim \begin{cases} 100-1000\ \mathrm{mm} & (12\ \mathrm{kHz}) \\ 10-100\ \mathrm{mm} & (90\ \mathrm{kHz}) \quad \mathrm{s.t.}\ ka \sim 10 \\ 1-10\ \mathrm{mm} & (400\ \mathrm{kHz}) \end{cases}$$

ここから，深海用の測深機（～ 10 kHz）を用いた場合には，半径 10 mm 程度以下の物体に対しては Rayleigh 散乱が生じ，半径 100 mm 程度以上の物体に対しては幾何散乱が生じることが考えられる．浅海用の測深機（～ 100 kHz）を用いた場合には，それぞれ a のスケールが 1－2 桁程度小さくなり，半径 0.1 mm 程度以下であれば Rayleigh 散乱，半径 1 mm 程度以上であれば幾何散乱となることが考えられる．

3.2　球面波による矩形面上の散乱

3.2.1　問題設定

2.4 節で示した Helmholtz-Kirchhoff の積分式を

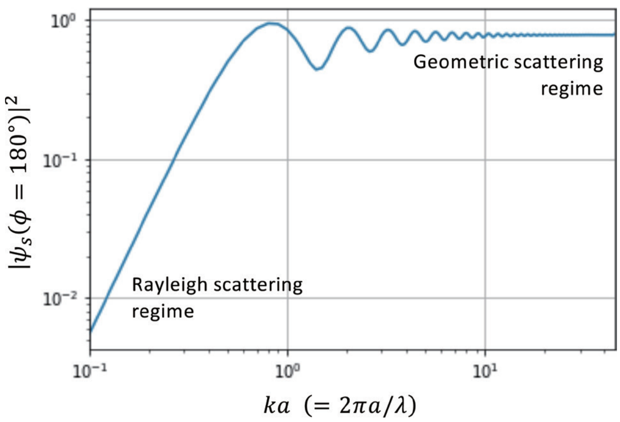

Fig. 3. The ka-dependence curve of the backscatter intensity $|\psi_s(\varphi=\pi)|$. The ka represents the ratio of the circumference of the target cylinder to the wavelength. The backscatter intensity asymptotically approaches a constant value for sufficiently large ka (geometric scattering). In the opposite case, the power law well approximates the intensity (Rayleigh scattering).

図 3.　後方散乱インテンシティ $|\psi_s(\varphi=\pi)|$ の ka 依存性．横軸 ka は観測波長に対する円周の比を表す．ka が十分に大きい領域ではインテンシティは漸近的にある一定値へ近づく（幾何散乱）．反対に，ka が十分に領域ではインテンシティは冪乗則でよく近似される（Rayleigh 散乱）．

用いて，矩形面上で生じる散乱波の音圧を導くことを考える．いま，3 次元直交座標系内に，$x-y$ 面上の矩形領域で定義された面 S を次のように設定する．

$$S: \left\{(\xi,\eta,\zeta) \middle| \xi \in \left[-\frac{w_x}{2},\frac{w_x}{2}\right], \eta \in \left[-\frac{w_y}{2},\frac{w_y}{2}\right], \zeta=\zeta(\xi,\eta)\right\} \tag{3.19}$$

この面 S は z 軸方向にわずかに凹凸を伴っており，その高さが $z=\zeta(\xi,\eta)$ である．また，点音源が位置 $\boldsymbol{r}_1$ にあるとし，面 S 上で生じた散乱波を位置 $\boldsymbol{r}$ で観測することとする．$\boldsymbol{r}_1$ 及び $\boldsymbol{r}$ の原点からの距離をそれぞれ r_1, r で表し，z 軸となす角の補角をそれぞれ θ_1, θ とおく．また，$\boldsymbol{r}$ を $x-y$ 面上に射影したときの x 軸からの回転角を φ とおくことにする．$\boldsymbol{r}_1$ についても同様に φ_1 を定めるが，$\boldsymbol{r}_1$ は x 軸の直上にあることとし，$\varphi_1=\pi$ とする．$\boldsymbol{r}_1$ 及び $\boldsymbol{r}$ の座標値は次のようになる．

$$\boldsymbol{r}_1 = (-r_1 \sin\theta_1, 0, -r_1\cos\theta_1)$$
$$\boldsymbol{r} = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, -r\cos\theta) \tag{3.20}$$

この系の模式図を Fig. 4 に示す．

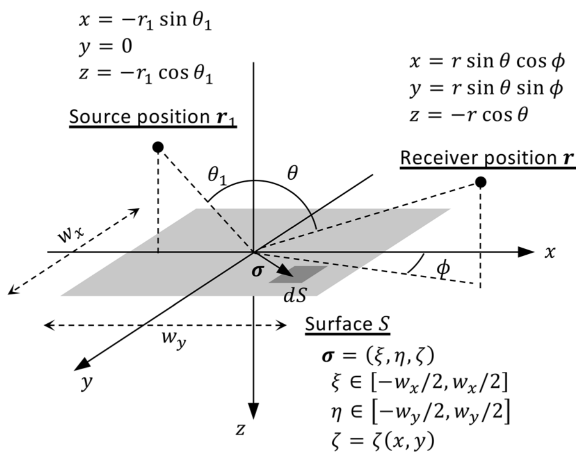

Fig. 4. Schematic for the problem of Section 3.2, the modeling of the scattered field around a rectangular surface by an incident spherical wave. The surface S is defined over a rectangle on the $x-y$ plane. The surface irregularity in the z-direction is represented by the function $\zeta(x,y)$. The vector $\boldsymbol{\sigma}=(\xi,\eta,\zeta)$ represents the position of the surface facet dS. The source and the receiver are located at $\boldsymbol{r}_1$ and $\boldsymbol{r}$, respectively.

図 4.　3.2 節の散乱問題における系の模式図．$x-y$ 平面の矩形領域で定義された面 S について，z 方向の凹凸は $\zeta(x,y)$ で表される．ベクトル $\boldsymbol{\sigma}=(\xi,\eta,\zeta)$ は面 S 上の微小領域 dS の位置を示す．

3.2.2　散乱場の積分表現

音源からは球面波が発せられるものとし，その音圧を

$$p_i(\boldsymbol{x}) = P_0 D \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \tag{3.21}$$

で表す．ここで, P_0 はスケーリングのための係数, D は音源の指向性を表すものとした．なお，媒質による伝播損失は無視できるものとする．

面Sにおける境界条件として，2.4 節に示した Kirchhoff 近似が成り立つとする．すなわち，散乱波の音圧及び音圧勾配は入射波の音圧及び音圧勾配にそれぞれ比例し，その比例係数は面上一定の反射係数Γで与えられるものとする. このとき，散乱場たる音圧は，2.17 式により

$$\begin{aligned} p_s(\boldsymbol{r}) &= \frac{\Gamma}{4\pi}\int_S \frac{\partial}{\partial n}\left(p_i(\boldsymbol{\sigma})\frac{e^{ik|r-\sigma|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\sigma}|}\right) dS \\ &= \frac{P_0\Gamma}{4\pi}\int_S D\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ik(|r_1-\sigma|+|r-\sigma|)}}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{\sigma}||\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\sigma}|}\right) dS \end{aligned} \tag{3.22}$$

と表される．ここで，$\boldsymbol{\sigma}$は面S上の点であり，次のように表しておく．

$$\boldsymbol{\sigma} = \big(\xi, \eta, \zeta(\xi,\eta)\big) \in S \tag{3.23}$$

3.2.3　被積分関数の近似

$p_s(\boldsymbol{r})$ の被積分関数を構成する 2 点間の距離 $|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{\sigma}|$ と $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\sigma}|$ について，展開するとそれぞれ次のようになる．

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{\sigma}|^2 &= (r_1\sin\theta_1+\xi)^2+\eta^2+(r_1\cos\theta_1+\zeta)^2 \\ &= r_1^2+2r_1(\xi\sin\theta_1+\zeta\cos\theta_1)+\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\sigma}|^2 &= (r\sin\theta\cos\phi-\xi)^2+(r\sin\theta\sin\phi-\eta)^2 \\ &\quad +(r\cos\theta+\zeta)^2 \\ &= r^2+2r(-\xi\sin\theta\cos\phi-\eta\sin\theta\sin\phi+\zeta\cos\theta) \\ &\quad +\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \end{aligned} \tag{3.25}$$

いま，$\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}$ は面Sから十分離れているとし，面S上のベクトル$\boldsymbol{\sigma}$の要素は微少量と見なせるものとする．ξ, ηは 2 次まで，ζは 1 次まで許容してそれぞれ近似を取ることにする．すると，次のように簡略化される．

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{\sigma}| &= r_1\left(1+\frac{2}{r_1}\xi\sin\theta_1+\frac{2}{r_1}\zeta\cos\theta_1+\frac{\xi^2}{r_1^2}+\frac{\eta^2}{r_1^2}+\frac{\zeta^2}{r_1^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\approx r_1+\xi\sin\theta_1+\zeta\cos\theta_1+\frac{\xi^2}{2r_1}+\frac{\eta^2}{2r_1} \end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\sigma}| &= r\left(1-\frac{2}{r}\xi\sin\theta\cos\phi-\frac{2}{r}\eta\sin\theta\sin\phi \right. \\ &\qquad \left. +\frac{2}{r}\zeta\cos\theta+\frac{\xi^2}{r^2}+\frac{\eta^2}{r^2}+\frac{\zeta^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\approx r-\xi\sin\theta\cos\phi-\eta\sin\theta\sin\phi+\zeta\cos\theta+\frac{\xi^2}{2r}+\frac{\eta^2}{2r} \end{aligned} \tag{3.27}$$

これによって，2 つの距離の和は

$$\begin{aligned} &|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{\sigma}|+|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\sigma}| \approx r_1+r \\ &+\xi(\sin\theta_1-\sin\theta\cos\phi)+\eta(-\sin\theta\sin\phi) \\ &+\zeta(\cos\theta_1+\cos\theta)+(\xi^2+\eta^2)\left(\frac{1}{2r_1}+\frac{1}{2r}\right) \end{aligned} \tag{3.28}$$

となる．

一方，2 つの距離の積は緩やかに変化することから $r_1 r$ で置き換えられるものとし，また，法線微分はζ方向偏微分で置き換えられるものとする．すなわち，次のとおり置き換えを行う．

$$|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{\sigma}||\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\sigma}| \approx r_1 r \tag{3.29}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \approx \frac{\partial}{\partial \zeta} \tag{3.30}$$

このとき，散乱場は次のような表式になる．

$$\begin{aligned} p_s(\boldsymbol{r}) &\approx \frac{P_0\Gamma}{4\pi r_1 r}\int_S D\frac{\partial}{\partial\zeta}e^{ik(|r_1-\sigma|+|r-\sigma|)}dS \\ &= \frac{ikP_0\Gamma(\cos\theta_1+\cos\theta)e^{ik(r_1+r)}}{4\pi r_1 r} \\ &\quad \int_{-\frac{w_x}{2}}^{\frac{w_x}{2}} d\xi \int_{-\frac{w_y}{2}}^{\frac{w_y}{2}} d\eta\, D\exp\left\{ik\left(\xi(\sin\theta_1-\sin\theta\cos\phi)\right.\right. \\ &\qquad +\eta(-\sin\theta\sin\phi)+\zeta(\cos\theta_1+\cos\theta) \\ &\qquad \left.\left. +(\xi^2+\eta^2)\left(\frac{1}{2r_1}+\frac{1}{2r}\right)\right)\right\} \end{aligned} \tag{3.31}$$

ある面S上で生じる散乱を Kirchhoff 近似を用いて記述したこの式は，Helmholtz-Kirchhoff-Fresnel 積分と呼ばれる（Medwin and Clay, 1998, 7.2.31 式）．

3.2.4　平面上で生じる後方散乱の計算

この問題の特殊な場合として，音源と観測点の場所が同一かつ z 軸上にあり，面 S が平面と見なせる場合を考える．これは例えば，海洋中に分布する密度境界面を直上から音響測深機等で観測するといった状況に相当する．この系の模式図を Fig. 5 に示す．このとき，

$$\theta_1 = \theta = 0, \qquad r_1 = r, \qquad \zeta = 0 \tag{3.32}$$

となる．また，音源の指向性は D=1 としておく．Helmholtz-Kirchhoff-Fresnel 積分にこれらを代入すると次のようになる．

$$p_s(r) = \frac{ikP_0\Gamma e^{i2kr}}{2\pi r^2}\int_{-\frac{w_x}{2}}^{\frac{w_x}{2}} e^{\frac{ik\xi^2}{r}}d\xi \int_{-\frac{w_y}{2}}^{\frac{w_y}{2}} e^{\frac{ik\eta^2}{r}}d\eta \tag{3.33}$$

ここで，Fresnel 積分

$$C(x) \equiv \int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)du \tag{3.34}$$

$$S(x) \equiv \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)du \tag{3.35}$$

を導入する．これらを用いれば，先の積分は次のようになる．

$$\int_{-\frac{w_x}{2}}^{\frac{w_x}{2}} e^{\frac{ik\xi^2}{r}}d\xi = 2\int_0^{\frac{w_x}{2}} e^{\frac{ik\xi^2}{r}}d\xi$$

$$= 2\sqrt{\frac{\pi r}{2k}}\int_0^{\sqrt{\frac{k}{2\pi r}}w_x} \exp\left(i\frac{\pi}{2}s^2\right)ds$$

$$= \sqrt{\lambda r}\left(C\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda r}}\,w_x\right) + iS\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda r}}\,w_x\right)\right)$$

$$\equiv \sqrt{\lambda r}\cdot I\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda r}}\,w_x\right) \tag{3.36}$$

よって，ここで定義した関数 I を用いて，Helmholtz-Kirchhoff-Fresnel 積分は次のように書き表される（Medwin and Clay, 1998, 7.3.7 式の変形版）．

$$p_s(r)_{w_x,w_y} = \frac{iP_0\Gamma e^{i2kr}}{r} I\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda r}}\,w_x\right) I\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda r}}\,w_y\right) \tag{3.37}$$

平面が無限に広がっている場合は，$w_x, w_y \to \infty$ の極限を取ればよい．ここで Fresnel 積分は

$$C(\infty) = S(\infty) = \frac{1}{2} \tag{3.38}$$

となることが知られているから，これを用いると散乱場は次のようになる（Medwin and Clay, 1998, 7.3.10 式の変形版）．

$$p_s(r)_{\infty,\infty} = \frac{iP_0\Gamma e^{i2kr}}{r}\frac{1}{4}(1+i)^2$$

$$= -\frac{P_0\Gamma e^{i2kr}}{2r} \tag{3.39}$$

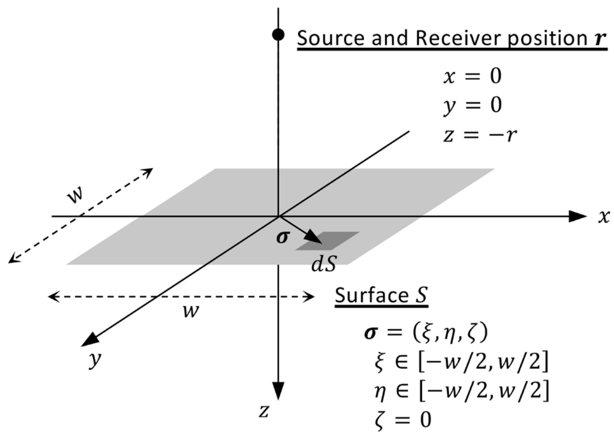

Fig. 5. Schematic for the special case of Fig. 4. Now the source and receiver are in the same position on the z-axis. The rectangle is replaced by a square with a side length of w.

図 5.　Fig. 4 の系の特殊な場合を表した模式図．音源と受信機は z 軸上の同一の場所にあるとし，矩形領域は一辺の長さが w の正方形で置き換えられている．

3.2.5　Fresnel 領域と Fraunhofer 領域

いま，一辺の長さが w の正方形領域による散乱音場と，無限平面による散乱音場の音圧の比をとることを考える．

$$\frac{|p_s(r)_{w,w}|}{|p_s(r)_{\infty,\infty}|} = 2\left|I^2\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda r}}\,w\right)\right|$$

$$= 2|C^2 - S^2 + 2iCS| = 2(C^2 + S^2) \tag{3.40}$$

これをプロットすると Fig. 6 のようになる．Fig. 6 の横軸は正方形の大きさ w，波長 λ 及び散乱面から観測点までの距離 r の関数となっている．グラフの形を見ると，w が $\sqrt{\lambda r}$ に対して十分小さい

ときには冪乗則でよく近似でき，$w \sim \sqrt{\lambda r}$ から $w \sim 10\sqrt{\lambda r}$ 程度の間は 1 のまわりを振動し，w が$\sqrt{\lambda r}$ に対して十分大きくなると 1 に漸近することがわかる．音圧の比が 1 というのは，正方形領域が無限平板と同一視できることを意味する．波長が短い場合や r が小さい場合は，正方形領域のサイズがそれほど大きくなくとも無限平板と同一視できるようになる．冪乗則が成り立つ領域は Fraunhofer 領域と呼ばれ，その外側は Fresnel 領域と呼ばれる（Medwin and Clay, 1998）．なお，本稿の議論では矩形領域の端部での回折を考慮していないため，現実の問題を扱う上では改良が必要である．

一例として，音響測深機の周波数帯（～ 10 － 100 kHz）における，Fresnel 領域の典型的なスケールを求める．3.1 節で示した例と同様，発振周波数が 12 kHz，90 kHz，400 kHz の 3 種類の機器を仮定し，音速を 1500 m/s とする．観測対象物のスケールとして一辺 5 m の正方形を考え，$w/\sqrt{\lambda r}=10$ となるような r を求めると次のようになる．

$$r = \begin{cases} 2\ \mathrm{m} & (12\ \mathrm{kHz}) \\ 15\ \mathrm{m} & (90\ \mathrm{kHz}) \\ 67\ \mathrm{m} & (400\ \mathrm{kHz}) \end{cases} \quad \mathrm{s.t.}\ w = 5\ \mathrm{m}, \frac{w}{\sqrt{\lambda r}} = 10$$

この結果から，深海用の測深機（～ 10 kHz）の場合には観測対象物までの距離が数 m 程度でなければ無限平板と同一視できない一方，浅海用の測深機（~ 100 kHz）の場合には，観測対象物まで数十 m 離れても，5 m 四方の正方形であれば無限平板と同一視できることがわかる．次に，観測対象物までの距離を 100 m に固定し，$w/\sqrt{\lambda r}=10$ となるような w を求めると，次のようになる．

$$w = \begin{cases} 35\ \mathrm{m} & (12\ \mathrm{kHz}) \\ 13\ \mathrm{m} & (90\ \mathrm{kHz}) \\ 6\ \mathrm{m} & (400\ \mathrm{kHz}) \end{cases} \quad \mathrm{s.t.}\ r = 100\ \mathrm{m}, \frac{w}{\sqrt{\lambda r}} = 10$$

すなわち，観測対象まで 100 m 程度離れている場合，深海用の測深機（～ 10 kHz）については観測対象物のスケールが一辺数十 m 以上でなければ無限平板と同一視できないが，浅海用の測深機（～ 100 kHz）の場合は数 m 程度の大きさであっても無限平板と同一視できることがわかる．

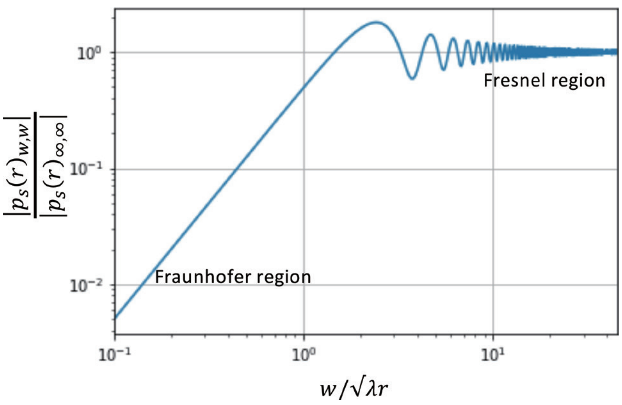

Fig. 6. The intensity ratio of the scattered pressure over the square with length w on the side to that over the infinite plane. The horizontal axis $w/\sqrt{\lambda r}$ represents the scale of the scatterer normalized by the wavelength and the distance from the receiver. The scattered field is asymptotically identical to that on an infinite plane when the scale $w/\sqrt{\lambda r}$ is sufficiently large (Fresnel region). Conversely, in the Fraunhofer region, the power law well approximates the intensity ratio.

図 6. 無限平面による散乱音圧に対する，一辺の長さが w の正方形による散乱音圧のインテンシティの比．横軸 $w/\sqrt{\lambda r}$ は観測波長と観測点からの距離で規格化した散乱体のスケールに相当する．このスケールが十分に大きい場合，正方形上の散乱場は無限平面上の散乱場と同一視できる（Fresnel 領域）．他方，Fraunhofer 領域においてはこのインテンシティ比は冪乗則でよく近似される．

4　おわりに

本稿では，海洋音響学における散乱問題を扱う上で基礎的な示唆を与えるような，初歩的な表式のみを取り扱った．実際の問題に適用するためには，音波の伝播損失や，散乱体が非剛体であることによる効果，回折の考慮など，さまざまな改良が求められる．本稿の参考文献にはそのような応用的な諸要素も豊富に収録されており，今後，実観測データの定量的解析といった具体的な散乱問題を扱う折には，引き続きレビューを行っていきたい．

謝　辞

本稿をまとめるにあたり，表式を含めた論理展開に関するチェック，及び内容の充実化に寄与する有益な提案をいただいた匿名の査読者に対し，ここに感謝申し上げます．

文　献

海洋音響学会編（2004），海洋音響の基礎と応用，314pp.，成山堂書店，東京．

Medwin, H. and C. S. Clay（1998）Fundamentals of acoustical oceanography, 712pp., Academic Press, Cambridge MA.

Morse, P. M. and K. U. Ingard（1968）Theoretical acoustics, 927pp., McGraw-Hill, New York.

付　録

付録 A　Bessel 関数，Neumann 関数及び Hankel 関数とその性質

A.1　関数の定義

Bessel の微分方程式（2.8 式）の解の基本形を $R(z)=c_1 J_m(z)+c_2 N_m(z)$　$(c_1, c_2 \in \mathbb{C})$ と置くとき，J_m と N_m を次のように表現できることが知られている．

$$J_m(z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(m+k+1)k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{m+2k} \qquad (A.1)$$

$$N_m(z) \equiv \frac{J_m(z)\cos m\pi - J_{-m}(z)}{\sin m\pi} \quad (m \notin \mathbb{Z}) \qquad (A.2)$$

J_m は m 次の Bessel 関数（第 1 種 Bessel 関数），N_m は m 次の Neumann 関数（第 2 種 Bessel 関数）である．m が非負整数のときは，Bessel 関数については Gamma 関数 $\Gamma(m+k+1)$ が階乗 $(m+k)!$ で置き換えられ，また Neumann 関数については次数の極限をとることで，次のように表現される．

$$J_m(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(m+k)!\,k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{m+2k} \quad (m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \qquad (A.3)$$

$$N_m(z) \equiv \lim_{\mu\to m} \frac{J_\mu(z)\cos \mu\pi - J_{-\mu}(z)}{\sin \mu\pi} \quad (m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \qquad (A.4)$$

Hankel 関数は，Bessel 関数と Neumann 関数の線形結合として次のように定義される．

$$H_m^{(1)}(z) \equiv J_m(z) + iN_m(z) \qquad (A.5)$$

$$H_m^{(2)}(z) \equiv J_m(z) - iN_m(z) \qquad (A.6)$$

ここで，$H_m^{(1)}$ は第 1 種 Hankel 関数，$H_m^{(2)}$ は第 2 種 Hankel 関数とそれぞれ呼ばれる．

A.2　次数の符号反転及び微分に関する性質

非負整数次の Bessel 関数について，次数 m の正負を反転した際の振る舞いを見る．

$$J_{-m}(z) = \lim_{\mu\to -m} J_\mu(z) = \lim_{\mu\to -m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(\mu+k+1)k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{\mu+2k} \qquad (A.7)$$

であるが，Gamma 関数は非正整数に 1 位の極をもつため，$\mu+k+1 \leq 0$ の場合においては

$$\lim_{\mu\to -m} \frac{1}{\Gamma(\mu+k+1)} = 0 \quad (k \leq m-1) \qquad (A.8)$$

となる．これを考慮すると，

$$\begin{aligned} J_{-m}(z) &= \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(-m+k)!\,k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{-m+2k} \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^m(-1)^s}{s!\,(m+s)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{m+2s} \end{aligned} \qquad (A.9)$$

である．なお，途中 $s \equiv -m+k$ の置き換えを用いた．よって，Bessel 関数は次数の符号反転について次の性質をもつことが確かめられた．

$$J_{-m}(z) = (-1)^m J_m(z) \qquad (A.10)$$

また，非負整数次の Bessel 関数の定義から，Bessel 関数の微分に関して次の 2 つの式が導かれる．

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dz}\left(z^m J_m(z)\right) \\ &= \frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(m+k)!\,k!}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+2k} z^{2m+2k} \\ &= z^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(m-1+k)!\,k!}\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1+2k} z^{m-1+2k} \\ &= z^m J_{m-1}(z) \end{aligned} \qquad (A.11)$$

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dz}\left(z^{-m}J_m(z)\right)\\&=\frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(m+k)!\,k!}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+2k}z^{2k}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(m+k)!\,(k-1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1+2k}z^{-1+2k}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(m+1+k)!\,k!}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1+2k}z^{1+2k}\\&=-z^{-m}J_{m+1}(z)\end{aligned} \quad (A.12)$$

これら2式より，次の関係式が示される．

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dz}\left(z^{m}J_m(z)\right)\\&=mz^{m-1}J_m(z)+z^m\frac{d}{dz}J_m(z)=z^mJ_{m-1}(z)\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dz}J_m(z)=J_{m-1}(z)-\frac{m}{z}J_m(z) \quad (A.13)$$

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dz}\left(z^{-m}J_m(z)\right)\\&=-mz^{-m-1}J_m(z)+z^{-m}\frac{d}{dz}J_m(z)=-z^{-m}J_{m+1}(z)\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dz}J_m(z)=-J_{m+1}(z)+\frac{m}{z}J_m(z) \quad (A.14)$$

辺々足し合わせれば，Bessel関数の微分についての関係式が次のように求まる．

$$2\frac{d}{dz}J_m(z)=J_{m-1}(z)-J_{m+1}(z) \quad (A.15)$$

ここでは示さないが，次数の反転や微分についてはNeumann関数もBessel関数と同様に振る舞うことが知られている．

$$N_{-m}(z)=(-1)^mN_m(z) \quad (A.16)$$

$$2\frac{d}{dz}N_m(z)=N_{m-1}(z)-N_{m+1}(z) \quad (A.17)$$

そのため，第1種及び第2種Hankel関数についても同様の規則が成り立つことがわかる．

$$H_{-m}^{(k)}(z)=(-1)^mH_m^{(k)}(z)\quad (k=1,2) \quad (A.18)$$

$$2\frac{d}{dz}H_m^{(k)}(z)=H_{m-1}^{(k)}(z)-H_{m+1}^{(k)}(z)\quad (k=1,2) \quad (A.19)$$

付録B　平面波のBessel関数による展開

単色平面波 $e^{ikr\cos\varphi}$ の円筒座標系における部分波展開である（2.9）式を導出する．まず，関数 $g(z,t)$ を次式で定義する．

$$g(z,t)\equiv\exp\left(z\,\frac{t-t^{-1}}{2}\right) \quad (B.1)$$

指数関数のMaclaurin級数展開により，次のように表すことができる．

$$\begin{aligned}g(z,t)&=e^{\frac{zt}{2}}e^{-\frac{z}{2t}}\\&=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\left(\frac{zt}{2}\right)^l\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(-\frac{z}{2t}\right)^k\end{aligned} \quad (B.2)$$

ここで，添え字を $m\equiv l-k$ と変換すると，

$$\begin{aligned}g(z,t)&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(m+k)!\,k!}\left(\frac{zt}{2}\right)^{m+k}\left(\frac{z}{2t}\right)^k\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(m+k)!\,k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{m+2k}t^m\\&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(m+k)!\,k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{m+2k}t^m\end{aligned} \quad (B.3)$$

これはLaurent級数展開の形になっているので，その係数を $J_m(z)$ とおくことにする．$J_m(z)$ はm次の第1種Bessel関数になっている．

$$\exp\left(z\,\frac{t-t^{-1}}{2}\right)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m(z)t^m \quad (B.4)$$

$$J_m(z)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(m+k)!\,k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{m+2k}$$

なお，関数 g の定義から

$$g(z,-t^{-1})=g(z,t) \quad (B.5)$$

であるから，（B.4）式の右辺について

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m(z)(-t^{-1})^m=\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m(z)t^m \quad (B.6)$$

が成り立つことになる．このようにしても，(A.10）式と同様の次数の符号反転についての性質

$$J_{-m}(z)=(-1)^mJ_m(z) \quad (B.7)$$

が確かめられる．

さて，$g(z,t)$ に $z=kr,\ t=ie^{i\varphi}$ を代入する．すると，（B.4）式の左辺は次のようになる．

$$g\left(kr,ie^{i\phi}\right)=\exp\left(kr\frac{ie^{i\phi}+ie^{-i\phi}}{2}\right)=e^{ikr\cos\phi} \quad (B.8)$$

また，（B.4）式の右辺について，$-\infty\leq m\leq\infty$ を $-\infty\leq m\leq 1$, $m=0$, $1\leq m\leq\infty$ の3つの範囲に分解して添字の符号反転の性質を用いれば，

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(kr) i^m e^{im\phi}$$
$$= J_0(kr) + \sum_{m=1}^{\infty} J_m(kr) i^m e^{im\phi}$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} J_n(kr)(-1)^n i^{-n} e^{-in\phi}$$
$$= J_0(kr) + \sum_{m=1}^{\infty} J_m(kr) i^m \left(e^{im\phi} + e^{-im\phi}\right)$$
$$= J_0(kr) + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_m(kr) i^m \cos(m\phi) \qquad (B.9)$$

と変形できる．よって，Bessel 関数を用いた単色平面波の級数展開

$$e^{ikr\cos\phi} = J_0(kr) + 2\sum_{m=1}^{\infty} i^m \cos(m\phi) J_m(kr) \qquad (B.10)$$

が示された．

付録 C　Helmholtz-Kirchhoff の積分式

ある閉曲面 S で囲まれた領域 V を考える．$\boldsymbol{n}$ を S 上の法線ベクトルとしたとき，ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ について，Gauss の発散定理が次のように成り立つ．

$$\int_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} dS = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{F}\, dV \qquad (C.1)$$

いま，Helmholtz 方程式 $(\nabla^2 + k^2)u = 0$ の解である 2 つのスカラー場 u_1 と u_2 を仮定し，ベクトル場 $u_1(\nabla u_2)$ を作ってこれに発散定理を適用すると，

$$\int_S u_1(\nabla u_2) \cdot \boldsymbol{n} dS = \int_V \nabla \cdot (u_1 \nabla u_2)\, dV$$
$$= \int_V (\nabla u_1 \cdot \nabla u_2 + u_1 \nabla^2 u_2)\, dV$$
$$= \int_V (\nabla u_1 \cdot \nabla u_2 + k^2 u_1 u_2)\, dV \qquad (C.2)$$

これは u_1 と u_2 を入れ替えても成り立つから，辺々引いて次の式を得る．

$$\int_S \left(u_1(\nabla u_2) - u_2(\nabla u_1)\right) \cdot \boldsymbol{n} dS = 0 \qquad (C.3)$$

$\nabla u \cdot \boldsymbol{n}$ を面 S 上の法線微分 $-\partial u/\partial n$ で書き換えると，次の式が導かれる．

$$\int_S \left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial n}\right) dS = 0 \qquad (C.4)$$

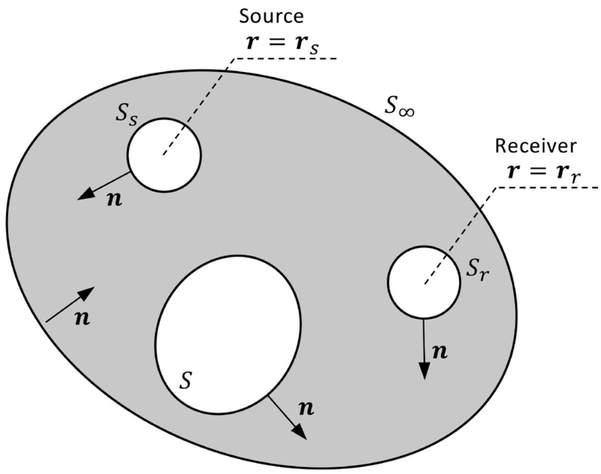

Fig. 7. Schematic of the integral domain for deriving the Helmholtz-Kirchhoff integral. The surface S represents the scatterer. The source and receiver positions are enclosed by surfaces S_s and S_r, respectively. The direction of the normal vector $\boldsymbol{n}$ is selected toward the inside of the hatched integral domain.

図 7.　Helmholtz-Kirchhoff 積分を導出するための積分領域の模式図．面 S は散乱体を表す．音源と受信機の存在する点はそれぞれ面 S_s と面 S_r で囲まれている．法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の向きは網掛けされた積分領域の側を向くように選択している．

さて，2 つのスカラー場として，Helmholtz 方程式の解たる未知の音圧 $p = p(\boldsymbol{r})$ と，同じく Helmholtz 方程式の解である球面波 e^{ikr}/r を考える．いま，点 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_s$ に音源があり，音源から発せられた音波が閉曲面 S で散乱し，点 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_r$ で観測されるという状況を考える．音源の周囲を閉曲面 S_s で囲み，観測点の周囲を閉曲面 S_r で囲む．そして，S_s，S_r 及び S を取り囲む大きな閉曲面 S_∞ を設定する．積分領域を Fig. 7 のようにとり，面の法線方向を S_s，S_r 及び S については外向き，S_∞ 上では内向きにとることにすると，次式が成り立つ．

$$\int_{S_s}\left(p\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)-\frac{e^{ikr}}{r}\frac{\partial p}{\partial n}\right)dS_s$$
$$+\int_{S_r}\left(p\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)-\frac{e^{ikr}}{r}\frac{\partial p}{\partial n}\right)dS_r$$
$$+\int_{S}\left(p\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)-\frac{e^{ikr}}{r}\frac{\partial p}{\partial n}\right)dS$$
$$+\int_{S_\infty}\left(p\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)-\frac{e^{ikr}}{r}\frac{\partial p}{\partial n}\right)dS_\infty=0 \qquad (C.5)$$

いま，$dS_r=a^2d\Omega$と書き $a\to 0$ の極限をとると，S_r 上面積分は

$$\lim_{a\to 0}\int_\Omega\left(p\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)-\frac{e^{ikr}}{r}\frac{\partial p}{\partial n}\right)a^2d\Omega$$
$$=\lim_{a\to 0}\int_\Omega\left(p\left[\frac{e^{ikR}}{R}\left(ik-\frac{1}{R}\right)\right]_{R=a}-\frac{e^{ika}}{a}\frac{\partial p}{\partial n}\right)a^2d\Omega$$
$$=\lim_{a\to 0}\int_\Omega\left(ikap-p-a\frac{\partial p}{\partial n}\right)e^{ika}d\Omega$$
$$=-p\int_\Omega d\Omega$$
$$=-4\pi p(\boldsymbol{r}_r) \qquad (C.6)$$

となる．また，$dS_s=\epsilon^2d\Omega$と置いて $\epsilon\to 0$ の極限を考えることとし，点 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_s$ における音圧を $\lim_{\epsilon\to 0}p(\boldsymbol{r})=p_s$ と置けば，S_s 上面積分は

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_\Omega\left(p\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)-\frac{e^{ikr}}{r}\frac{\partial p}{\partial n}\right)\epsilon^2d\Omega$$
$$=-\int_\Omega\lim_{\epsilon\to 0}p\,d\Omega=-4\pi p_s \qquad (C.7)$$

となる．S_∞については，$dS_\infty=r^2d\Omega$と置いて $r\to\infty$ の極限を考えると，S_∞上面積分は

$$\lim_{r\to\infty}\int_\Omega\left(p\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)-\frac{e^{ikr}}{r}\frac{\partial p}{\partial r}\right)r^2d\Omega \qquad (C.8)$$

である．ここで，積分領域を半径 r の球面上にとっても一般性を失わないことから，法線微分$\partial/\partial n$を動径方向の微分$\partial/\partial r$ に置き換えた．（C.8）式をさらに展開すると

$$-4\pi\left(\lim_{r\to\infty}pe^{ikr}+\lim_{r\to\infty}re^{ikr}\left(\frac{\partial p}{\partial r}-ikp\right)\right) \qquad (C.9)$$

となるが，無限遠における音圧 $\lim_{r\to\infty}p(\boldsymbol{r})$ による影響を無視するものとし，さらに無限遠における漸近的な振る舞いとして

$$\lim_{r\to\infty}\left(\frac{\partial p}{\partial r}-ikp\right)=0 \qquad (C.10)$$

が満たされるような物理条件（Sommerfeld の放射条件）を仮定すると，S_∞上面積分の項を 0 とできる．以上の議論により，$p(\boldsymbol{r}_r)$ についての積分方程式（Helmholtz-Kirchhoff の積分式）が次のように得られる．

$$p(\boldsymbol{r}_r)=p_s+\frac{1}{4\pi}\int_S\left(p\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)-\frac{e^{ikr}}{r}\frac{\partial p}{\partial n}\right)dS \qquad (C.11)$$

この式から，散乱体表面における音圧と音圧勾配が分かれば，散乱体外部の任意の点における散乱音場を求めることができる．またこの式は，ある面から発生した球面波を観測点で合成することにより波動場を得るというものになっており，この場合における Huygens の原理の数学的表現にもなっている．

要　旨

海洋音響学における散乱問題への初歩的なアプローチとして，いくつかの散乱音場の表式を得るための基本的な定式化についてレビューする．Helmholtz 方程式の解の概観から始まり，無限円柱への平面波の入射による散乱と，矩形面への球面波の入射による散乱について概観する．いずれの散乱問題についても，円柱の直径や矩形のサイズといった散乱体のスケールと，観測波長といった音場のスケールとの比に依存して，散乱強度の空間分布が変化する様子が導かれた．本稿の結果はいずれも単純化された問題設定の下での近似解であるが，Rayleigh 散乱と幾何散乱，Fraunhofer 領域と Fresnel 領域等のキーワードによって特徴づけられる現実の散乱問題への応用に際して，重要な示唆を与える定式化であるといえる．