

# 大気による光の屈折の解析の一方法と応用

久保良雄・第三管区海上保安本部水路部

竹村武彦・航法測地課

## A New Approach to the Analysis of Refraction and its Application

Yoshio Kubo : 3rd R.M.S.Hq. Hydro. Dept.

Takehiko Takemura : Geodesy and Geophysics Division

### 1. はじめに

天文観測、渡海水準測量等における大気による光線の屈折（以下大気屈折という）の影響は未だ完全には解明されていない。渡海水準測量において大気屈折は観測値に大きな影響を及ぼすが、既存のどの理論も観測データを補正するのに十分に有効でない。

大気モデルを与えれば、数値計算により光線の曲りを計算することは容易である。しかし、数値計算では、いかなる状態の大気がいかなる影響を及ぼすかを、一般的に論ずることはできない。本稿では、天体力学における一般摂動論に類似の方法による大気屈折の解析方法を示すとともに、天文観測、渡海水準測量における大気屈折の一般的な性質について論ずる。

### 2. 光線経路の方程式

第1図は、地球の中心と光線ABCの経路を含む面で地球及び大気を切った断面である。地球の中心を原点とし、地球（球と考える）の半径を1とする平面極座標（ $\theta, x$ ）を考えると、次の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{d\theta^2} &= \frac{(dx/d\theta)_2 - (dx/d\theta)_1}{\theta_2 - \theta_1} = \frac{d(x \tan a)}{d\theta} \\ &= \frac{x/\cos^2 a \cdot da + \tan a dx}{d\theta} \end{aligned}$$

ここに、 $\tan a = dx/(x d\theta)$  を利用した。n を大気の屈折率として、da を次のように計算する。

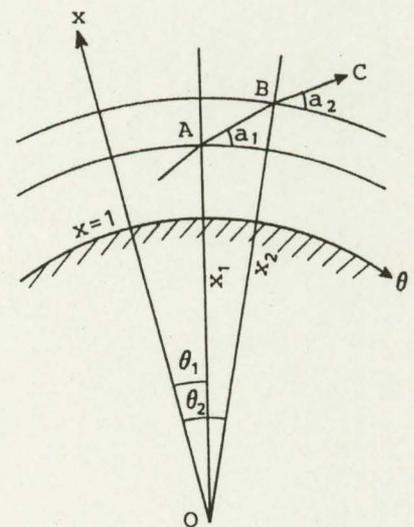
(1) 屈折率の変化の水平成分  $\partial n/\partial \theta$  による da は、 $d(n \sin a) = 0$  より、

$$da = (-\tan a/n) dn_\theta = -(\tan a/n) \cdot (\partial n/\partial \theta) d\theta$$

(2) 屈折率の変化の鉛直成分  $\partial n/\partial x$  による da は、 $d(n \cos a) = 0$  より、

$$da = (\cot a/n) dn_x = (\cot a/n) \cdot (\partial n/\partial x) \cdot (dx/d\theta) d\theta$$

(3) 光線が曲がらなくても、座標軸が光線に対し曲率を持つこと



第1図 地球及び大気の断面と光線ABC

により

$$da = d\theta$$

以上より,

$$\ddot{x} = \frac{1}{x} (x^2 + 2\dot{x}^2) - \frac{1}{n} (x^2 + \dot{x}^2) \left( \frac{\dot{x}}{x^2} \frac{\partial n}{\partial \theta} - \frac{\partial n}{\partial x} \right) \quad (1)$$

これが光線経路の基本方程式である。ただし,  $\dot{x} = dx/d\theta$ ,  $\ddot{x} = d^2x/d\theta^2$  を表わす。

### 3. 一般摂動論による解法

$$R_0 = (x^2 + 2\dot{x}^2)/x, \quad R_1 = -(x^2 + \dot{x}^2) \left\{ \left( \frac{\dot{x}}{x^2} \right) \cdot \left( \frac{\partial n}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial n}{\partial x} \right\} / n$$

と書く。 $\ddot{x} = R_0$  は一様媒質中の光線経路の方程式であり,  $\alpha, \beta$  を定数として, 次の解を持つことは容易に確かめられる。これは平面極座標における直線の方程式である。

$$x = \alpha / \cos(\theta - \beta) \quad (2)$$

$\alpha, \beta$  の意味は第2図に示される。Aから光線が出発するものとし,  $\theta$  をOAから測る。ON $\perp$ ABとする。このとき,  $\alpha = ON$ ,  $\beta = \angle AON$  である。また,

$$\dot{x} = \alpha \sin(\theta - \beta) / \cos^2(\theta - \beta) \quad (3)$$

逆に,

$$\alpha = x^2 / \sqrt{x^2 + \dot{x}^2}, \quad \beta = \theta - \tan^{-1}(\dot{x}/x) \quad (4)$$

定数変化法による摂動論によれば,  $R_1$  が存在するとき,

$$\dot{\alpha}_i = -\sum_j \{ \alpha_i, \alpha_j \}_{x, \dot{x}} \cdot (R_1 \cdot \partial x / \partial \alpha_j)$$

により,  $\theta$  とともに  $\alpha, \beta$  が変化する (Broucke, 1977)。ここに,  $\alpha_i$  は  $\alpha, \beta$ , また,  $\{, \}_{x, \dot{x}}$  はポアソン括弧式である。これより,

$$\dot{\alpha} = -x^2 \dot{x} / (x^2 + \dot{x}^2)^{3/2} \cdot R_1, \quad \dot{\beta} = -x / (x^2 + \dot{x}^2) \cdot R_1 \quad (5)$$

$\delta\beta = \int \dot{\beta} d\theta$  は光源を発した光線が一様媒質中を進むとした場合の直線と, 実際の光線の  $\theta$  における接線とのなす角であり (第4図参照), 光線が受けた大気屈折の量を表わす。

### 4. 天文観測における大気差への応用例

地表の点から任意の方向に発した光線の経路を求める。 $\partial n / \partial \theta = 0$  とする。

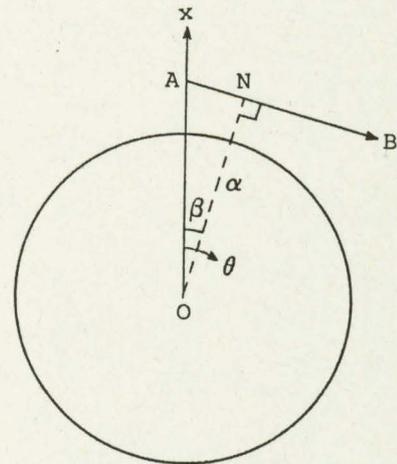
$$\delta\beta = \int_0^\theta \dot{\beta} d\theta = -\int_0^\theta (x/n) \left( \frac{\partial n}{\partial x} \right) d\theta$$

$\delta\beta < 2000''$  であり,  $1''$  の精度では  $n = n_0$  としてよい。ただし,  $n_0$  は地表における空気の屈折率である。また, 空気の密度  $\rho$  の高さによる変化率  $\partial \rho / \partial x$  として次の式を採用する。

$$\rho = \rho_0 \cdot 10^{-30(x-1)} \quad (\rho_0 \text{ は地表の大気密度})$$

これは, 大気屈折に影響を及ぼすのが, 70~80%高さ  $h < 10$  kmの大気であることを考慮し, US標準大気1976(理科年表, 1984)の  $h \sim 5$  kmにおける値を用いて近似したものである。

一方,  $\rho$  と  $n$  の関係は,  $c$  をある定数として,



第2図 定数  $\alpha, \beta$  の意味

第1表 地表から高度30°の方向に発した光線の屈折量

$\theta$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.5	2.0	3.0
h	13km	26	39	52	66	100	135	208
$\delta\beta$	1.238	1.543	1.616	1.634	1.638	1.640	1.640	1.640

第2表 種々の視高度における大気差の計算例及びラドー表との比較

視高度	80°	70	60	50	40	30	20	10	0
$\delta\beta$	0.168	0.346	0.549	0.797	1.131	1.640	2.585	5.172	31.36
ラドー	0.167	0.345	0.547	0.794	1.127	1.635	2.580	5.187	33.34

$$n = 1 + c\rho, \text{ 従って } \partial n / \partial x = c \cdot \partial \rho / \partial x$$

で表わされ (Smart, 1962), 1気圧, 15℃において  $c\rho_0 = 0.000277$  である。

一例として, 地表から30°の高度の方向に発した光を追跡すると, 第1表のようになる。 $\theta \rightarrow 90^\circ$ における最終的な $\delta\beta$ の値は, いわゆる視高度30°における大気差であり, ラドーの表によれば1.635である。

次に, 各高度に発した光線の受ける屈折量, つまり, 各視高度の大気差を計算したものを第2表に掲げる。表の第3行目は, ラドーの表において1気圧, 15℃に換算した値である。視高度が低くなるにつれて誤差が大きくなるのは, いわゆる1次の摂動しか考慮していないためである。次節で論ずる渡海水準測量の場合には, 経路が短いため, 2次の摂動は全く無視し得る。

### 5. 渡海水準測量における大気屈折

(1) [準備1]  $s, h_1, h_2$  と  $\alpha, \beta$  との関係

第3図において, A, Bは2つの測点,  $s = \angle AOB$ ,  $h_1, h_2$  は2測点の標高である。 $s \ll 1$ とする。

(2)式より,

$$x_i = 1 + h_i = \alpha / \cos(\theta_i - \beta) \div \alpha \{ 1 + (\theta_i - \beta)^2 / 2 \}$$

( $h_i$ の単位は地球の半径)

$\theta_1 = 0, \theta_2 = s$ であるから,

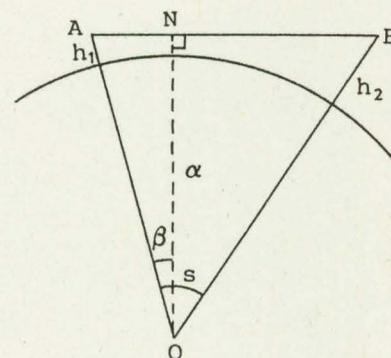
$$h_2 - h_1 = \alpha (s^2 - 2\beta s) / 2$$

$$\therefore \beta = s/2 - (h_2 - h_1) / \alpha s \div s/2 - (h_2 - h_1) / s \quad (6)$$

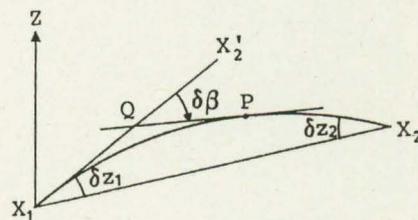
$\alpha$ はさしあたり必要ないので省略する。

(2) [準備2]  $\delta\beta$ との比高の誤差との関係

第4図において, 一方の測点 $X_1$ , から発し, 他方の測点 $X_2$ に達する光線の,  $X_1$ における接線を $X_1 X_2'$ とする。実際の光線は $X_1 P X_2$ を進む。Pにおける経路の接線PQが $X_1 X_2'$ となす角( $Q X_2'$ からQP方向に測る)は $\delta\beta$ である。一方, 直線 $X_1 X_2$ が $X_1 X_2'$ となす角は, 十分な近似で,



第3図  $s, h_1, h_2$  と  $\alpha, \beta$  との関係



第4図 任意の点Pにおける屈折量  $\delta\beta$ 及び $\delta z_1, \delta z_2$

$$\angle X_2' X_1 X_2 = \left( \int_0^s \delta\beta \, d\theta \right) / s = \bar{\delta\beta}$$

よって、図の  $\delta z_1 (= \angle Z X_1 X_2' - \angle Z X_1 X_2)$ ,  $\delta z_2$  (同様とする)は、

$$\delta z_1 = \delta\beta_0 - \bar{\delta\beta} = -\bar{\delta\beta}, \quad \delta z_2 = \bar{\delta\beta} - \delta\beta_s$$

となる。 $\delta z_1$ ,  $\delta z_2$  が  $X_1$ ,  $X_2$  の比高に及ぼす誤差は、

$$\delta(h_2 - h_1) = (\delta z_2 - \delta z_1) s / 2 = (2\bar{\delta\beta} - \delta\beta_s) s / 2 \quad (7)$$

なお、 $\delta z_1 + \delta z_2$  は測角データから計算できるが、 $\delta z_1$ ,  $\delta z_2$  のそれぞれは求められないことは言うまでもない。ここにそもそもの問題があるわけである。

### (3) $\partial n / \partial \theta$ の影響

1次の理論では、 $\partial n / \partial \theta$ ,  $\partial n / \partial x$  の影響はそれぞれ加えればよいので、それぞれについて考える。まず、 $\partial n / \partial x = 0$  とし、 $\partial n / \partial \theta$  の影響だけを考える。

$$\delta\beta_\theta = \int_0^\theta (1/n) \cdot (\dot{x}/x) \cdot (\partial n / \partial \theta) \, d\theta = \int_{n_0}^{n_\theta} (1/n) \cdot (\dot{x}/x) \, dn \doteq (\bar{x}/\bar{x}) \cdot (n_\theta - n_0) \quad (8)$$

通常、 $\bar{x}/\bar{x} < 0.01$  であるから、 $|\delta\beta| < 0.01 |n_\theta - n_0| = 0.01 |\delta n|$  である。

$\theta = 0$  と  $\theta = s$  における気温の差  $\delta T = 100^\circ\text{C}$  として  $|\delta n| \sim (100/273) \times 0.000277 \sim 0.0001$ , よって  $|\delta\beta| < 0.000001 = 0''2$  である。

従って、 $X_1$  から  $X_2$  に至る間の気温の水平的変化は全く無視し得る。逆に言えば、大気屈折の補正のために、光の経路に沿って気温を測っても全く意味がない。気圧の変化の影響はさらに小さい。

### (4) $\partial n / \partial x$ の影響

$\partial n / \partial x$  は一般に  $x$  及び  $\theta$  の関数である。 $x$  のみの関数であっても、光線経路に沿って積分を行う際、 $x$  が  $\theta$  の関数であるので、 $\partial n / \partial x = \text{const.}$  でない限り  $\partial n / \partial x$  は  $\theta$  に依存する。

i  $\partial n / \partial x$  が陽に  $\theta$  の関数でない場合

すなわち、層状大気ではあるが密度の鉛直勾配が一定でない、たとえば逆転層がある場合などである。密度の鉛直方向の変化が2次式で近似できるものとし、

$$n = 1 + c\rho_0 \{ 1 + A(x-1) + B(x-1)^2 \}$$

とすると、

$$\partial n / \partial x = c\rho_0 \{ A + 2B(x-1) \}$$

$$\begin{aligned} \delta\beta &= -\int_0^\theta (x/n) (\partial n / \partial x) \, d\theta \doteq - (c\rho_0 \bar{x} / n_0) \int_0^\theta \{ A + B(x-1) \} \, d\theta \\ &\doteq - (c\rho_0 \bar{x} / n_0) \int_0^\theta \{ A + 2B(\alpha-1) + B(\theta-\beta)^2 \} \, d\theta \end{aligned}$$

第1項、第2項については  $2\bar{\delta\beta} - \delta\beta_s = 0$  となる。第3項については、

$$\delta\beta_s = - (c\rho_0 \bar{x} / n_0) \cdot (B/3) \cdot (s^3 - 3s^2\beta + 3s\beta^2)$$

$$\begin{aligned} \bar{\delta\beta} &= - (1/s) \cdot (c\rho_0 \bar{x} / n_0) \cdot (B/3) \int_0^s (\theta^3 - 3\theta^2\beta - 3\theta\beta^2) \, d\theta \\ &= - (c\rho_0 \bar{x} / n_0) \cdot (B/3) \cdot (s^3/4 - s^2\beta + 3s\beta^2/2) \end{aligned}$$

(6)式を使って、

$$2\bar{\delta\beta} - \delta\beta_s = (c\rho_0 \bar{x} / n_0) (Bs/3) (h_2 - h_1)$$

(7)式を使い、 $c\rho_0 = 0.000277$ ,  $\bar{x} \doteq 1$ ,  $n_0 \doteq 1$  とし、

$$\delta(h_2 - h_1) = 0.000277 Bs^2 (h_2 - h_1) / 6 \quad (9)$$

たとえば、海拔0mにおける温度勾配を  $+0.6^\circ\text{C}/100\text{m}$ , 海拔200mにおけるそれを  $-0.6^\circ\text{C}/100\text{m}$  とすると、 $A = -886$ ,  $B = +4.25 \times 10^6$  となる。この計算において、 $\partial\rho/\partial x = -63800$

$\rho_0 (\partial T / \partial h + 3.4) / T_0$  を利用した (正野, 1956)。ここに,  $\partial T / \partial h$  の単位は  $^{\circ}\text{C} / 100\text{m}$  であり,  $T_0$  は地表の気温の絶対温度で  $T_0 \sim 288^{\circ}\text{K}$  である。さらに, 測点間の距離  $s = 50\text{km}$ , 標高差  $h_2 - h_1 = +100\text{m}$  とすると,  $\delta (h_2 - h_1) = +120\text{cm}$  となる。

このような大気の場合,  $\delta (h_2 - h_1)$  が  $h_2 - h_1$  に比例することが特徴である。このことから, 測線の両端にそれぞれ高さの異なる 2 点以上の測点を設けて同時観測を行えば,  $B$  を求めることができ,  $\delta (h_2 - h_1)$  も計算することができる。なお,  $\delta z_1 + \delta z_2 = -\delta \beta s$  にも測点の標高依存性が現れ, これからも  $B$  を求めることができる。

第3表 1982年3月3日の白浜—新島間の観測例

測点		白浜A— 新島A	白浜A— 新島B	白浜B— 新島A	白浜B— 新島B	4測線の 単純 平均値	本論による補正を 行った値	Bの値	$\frac{\partial T}{\partial h}$ 白浜	$\frac{\partial T}{\partial h}$ 新島
標高差 (白浜基準)		+63m	+21m	+148m	+106m				気温測点中点標高	
									130m	127m
	時分	m	m	m	m	m	m	$\times 10^6$	$^{\circ}\text{C} / 100\text{m}$	$^{\circ}\text{C} / 100\text{m}$
$\Delta N$	20 15	3.32	3.67	3.49	3.82	3.58	3.58	0.0	+0.45	-1.76
	21 15	4.00	3.66	4.99	4.89	4.39	3.41	4.7	+0.79	-1.82
	22 15	4.15	3.95	5.24	5.53	4.72	3.67	5.1	+0.76	-1.27
	23 15	4.17	3.72	4.42	4.17	4.12	3.70	2.0	+0.78	-1.33
	平均					4.20 $\pm 0.24$	3.59 $\pm 0.06$			

第3表は, 1982年3月3日の白浜—新島間の観測データに, 本理論を適用したものである。この日は気象状況が安定でなく, 観測データに大きなばらつきが見られるため, 水路部観測報告天文測地編の報告に, このデータは採用されていない。明らかに, 気温の鉛直方向の変化の2次項の影響が見られる。これに上の補正をすると, 各時刻の測定値がよく揃う(第7欄)。しかしながら, この日の場合, 大気が層状であるという仮定は成り立っておらず, 他の日の観測値と比較して平均値がかなり違っている(次項参照)。

ii  $\partial n / \partial x$  が陽に  $\theta$  の関数である場合

$$n = 1 + c\rho_0 \{ 1 + f(\theta)(x-1) \}, \text{ 従って, } \partial n / \partial x = c\rho_0 f(\theta)$$

のような場合を考える。

$$\delta\beta = -\int_0^\theta (x/n) \cdot (\partial n / \partial x) d\theta \doteq - (c\rho_0 \bar{x}/n_0) \int_0^\theta f(\theta) d\theta$$

いま,  $f(\theta) = A + C\theta$  という最も簡単な場合を考える。つまり, 気温の鉛直変化率が  $X_1$  から  $X_2$  にかけて一様に変化している場合である。第1項の  $A$  については  $2\bar{\delta}\beta - \delta\beta_s = 0$  となる。第2項については,

$$2\bar{\delta}\beta - \delta\beta_s = (c\rho_0 \bar{x}/n_0) \cdot (Cs^2/6) \doteq 0.000277 Bs^2/6$$

$$\delta(h_2 - h_1) = 0.000277 Cs^3/12$$

たとえば  $(\partial T / \partial x)_1 = -0.6^{\circ}\text{C} / 100\text{m}$ ,  $(\partial T / \partial x)_2 = -0.9^{\circ}\text{C} / 100\text{m}$  とすると,  $A = -620$ ,  $Cs = +66$  である。  $S = 50\text{km}$  では  $\delta(h_2 - h_1) = +76\text{cm}$  となる。

この場合, 測点をどう設定するとも, 測角データからだけでは  $C$  を知ることができない。  $C$  を求め, その

影響を消すには、 $X_1$ ,  $X_2$  で気温の鉛直勾配を測る以外にない。しかも、これは  $f(\theta) = A + C\theta$  と仮定した場合である。一般には光線経路に沿って  $\partial T / \partial x$  を測る必要がある。

前項の観測において、 $\partial T / \partial x$  は白浜、新島双方で測られている（第3表，第9，10欄）。しかしながら、これをそのまま採用してCを計算すると過剰補正になる。前項の鉛直勾配の2次項と組み合わせてもうまくいかない。温度の測り方に問題があるか、 $f(\theta) = A + C\theta$  の仮定が違っているかであると思われる。

(5) 渡海水準測量における大気屈折の影響のまとめ

- i 測線の両端、あるいは光線経路に沿っての気温、気圧そのものの値は知る必要がない。
- ii 完全な補正を行うためには、光線経路に沿って気温の鉛直方向変化率 ( $\partial T / \partial x$ ) を知る必要がある。  
である。
- iii これが不可能な場合でも、少なくとも測線の両端における  $\partial T / \partial x$  をかなり正確に知る必要がある。
- iv iiの実行が不可能な場合、補正はかなりの仮定の上に立ったものとならざるを得ない。

参 考 文 献

Broucke, R. 1977 : Private communication

Smart, W. M. 1962 : Textbook on Spherical Astronomy, 5th Ed., pp. 66

理科年表 1984 : 東京天文台編 (丸善) 376 - 378 ページ

正野重方 1956 : 理科基礎講座10, 地学 I (岩崎書店), 181 - 184 ページ